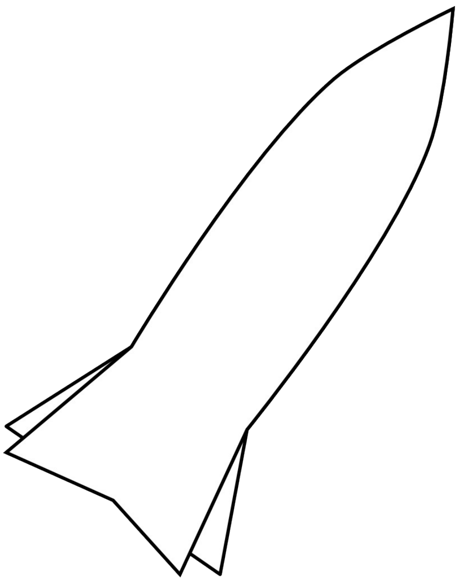
Introduction au vol spatial

Cours I
Éléments de balistique

Be it thy course to busy giddy minds

HENRY IV, *in Part 2 IV, v*



v2.1.1

 Olivier Cleynen

Introduction

En posant les bases nécessaires à l'étude des trajectoires orbitales au cours suivant, ce *Cours I : Éléments de balistique* a pour objectif de répondre à deux questions :

- Comment étudie-t-on la trajectoire et le comportement des corps en chute libre ?
- Comment passe-t-on d'une simple trajectoire de chute à une orbite ?

1. L'accélération en tant que vecteur

Il est utile de revenir sur la définition de l'*accélération*.

Dans la vie courante, elle est souvent perçue comme la variation de la vitesse longitudinale avec le temps — par exemple, « l'accélération d'une voiture » pourra être mesurée par la vitesse de l'aiguille du compteur de vitesse.

Nous utiliserons une définition plus générale et bien plus puissante : l'accélération en tant que changement du vecteur de la vitesse dans le temps.

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{dt} \qquad \text{(I-1.1)}$$

où la norme du vecteur $\vec{a}$ est en m/s² ;
et celle du vecteur $\vec{v}$ est en m/s.

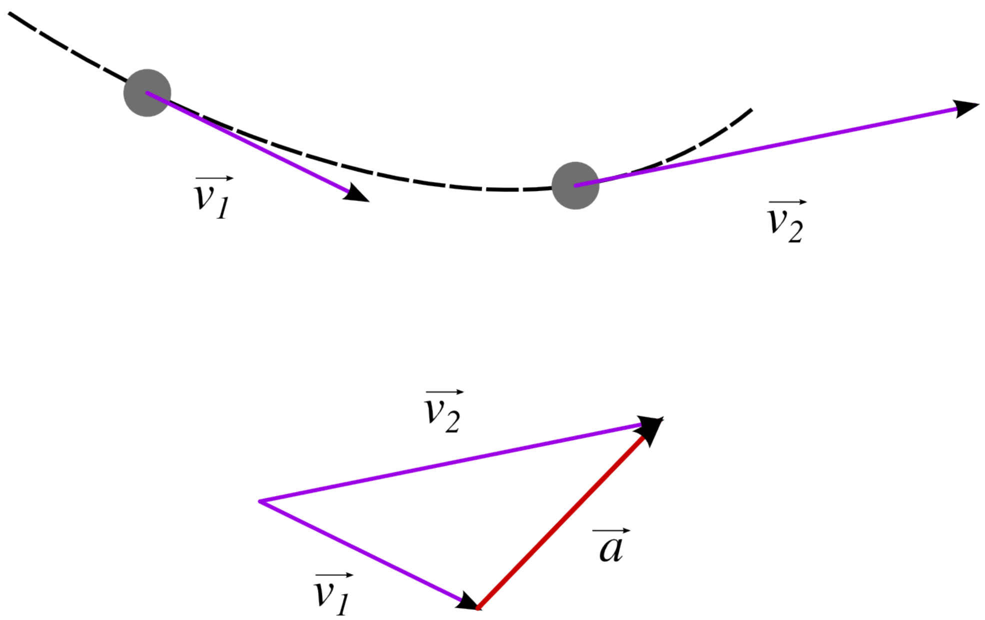


Figure 1.1 : Accélération moyenne entre deux points où la vitesse a varié, en norme et en direction.

La notation vectorielle est fondamentalement importante et d'une utilité sans pareille en mécanique. On découvre par exemple qu'une automobile qui suit un virage subit une accélération *même si sa vitesse est constante* (figure 1.2).

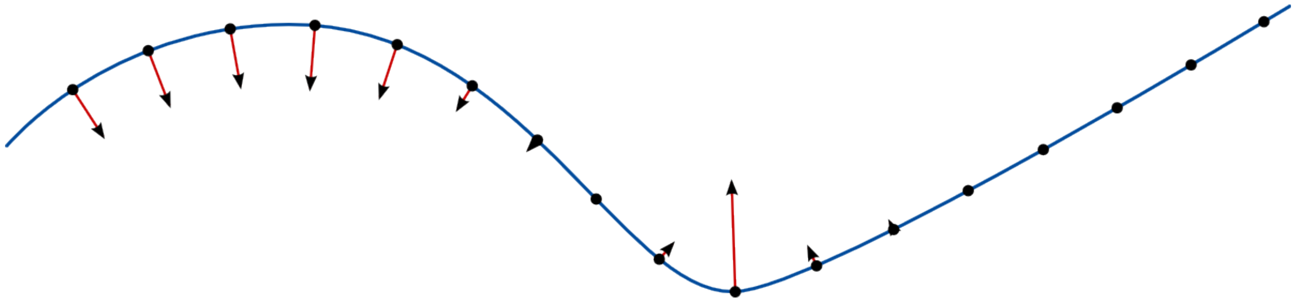


Figure 1.2 : Accélération subie par un objet suivant une trajectoire arbitraire, le long de laquelle sa vitesse reste constante.

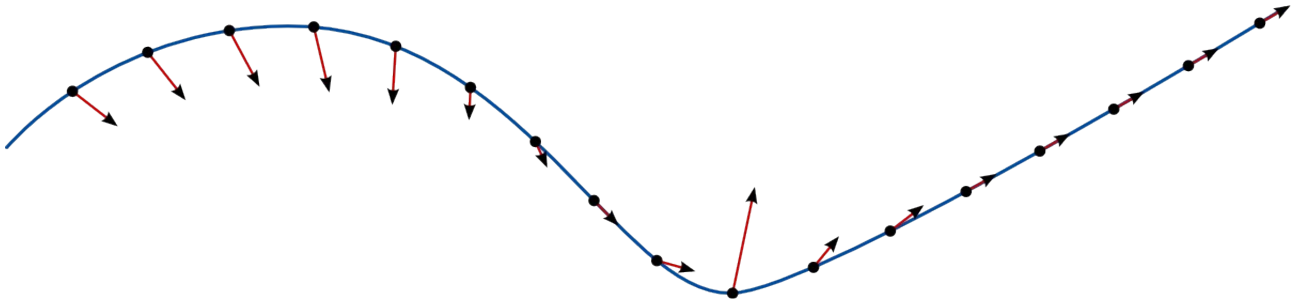


Figure 1.3 : Accélération subie par un objet suivant une trajectoire arbitraire, le long de laquelle sa vitesse augmente constamment (de gauche à droite)

2. Outils pour l'analyse des trajectoires

a) La seconde loi de Newton

La seconde loi de Newton doit sans condition recevoir toute l'estime et la révérence de l'étudiant/e en ingénierie. Elle nous servira de point de départ dans de multiples analyses de trajectoire.

En substance, la seconde loi de Newton stipule que *l'accélération n'est rien d'autre qu'une force*, à une constante près : la masse.

$$m \vec{a} \equiv \Sigma \vec{F} \tag{I-2.1}$$

où la norme de $\vec{a}$ est en m/s²,
celle de $\vec{F}$ est en N,
et la masse m est mesurée en kg.

Ainsi, pour générer une accélération, il nous faudra impérativement appliquer une force nette dans la même direction, qui sera d'autant plus grande que la masse sera grande.
À l'inverse, toute force nette sur un corps équivaut à une accélération (d'autant plus faible que sa masse est grande). Il n'y a aucune relation de cause à effet ; la relation est instantanée et universelle.

En balistique et dans l'analyse des trajectoires spatiales en général, nous utiliserons la seconde loi de Newton pour prédire des trajectoires (liées à l'accélération) à partir des forces exercées sur les véhicules (fusées, satellites).

b) La conservation de l'énergie

Lorsque la trajectoire d'un corps est connue, il est souvent possible de connaître sa vitesse ou son altitude en un point en utilisant le principe de la conservation de l'énergie.

Ce principe stipule en substance que l'énergie ne peut ni être détruite, ni créée. Entre deux instants, elle ne peut donc que s'être transformée.

Il faudra prendre garde à bien définir les systèmes au sein desquels nous utilisons cet outil. Par exemple, un satellite en orbite haute échange énergie cinétique et énergie potentielle d'altitude ; on peut quantifier la variation de l'une de ces deux grandeurs en connaissant celle de l'autre. Par contre, un véhicule traversant l'atmosphère dissipe beaucoup d'énergie par frottement et son énergie mécanique n'est pas du tout constante.

c) Démarche générale

Pour pouvoir prédire la trajectoire et le comportement d'un objet (par exemple, déterminer la portée d'un lancer de pierre), il est usuel d'avoir recours à la démarche suivante :

- On détermine les forces qui s'appliquent sur l'objet, et la façon dont elles varient en fonction du temps et de sa position ;
- L'accélération de l'objet peut être ainsi déterminée avec la seconde loi de Newton.
  Le choix du systèmes de coordonnées (avec lequel mesurer la position de l'objet) n'a rigoureusement pas d'importance. Pour faciliter l'analyse de la situation, nous utilisons souvent un système dans lequel une des forces au moins ne variera que sur une coordonnée.
- La vitesse puis la position de l'objet en fonction du temps peut être déterminée à partir de l'accélération. On peut également ainsi déterminer chaque coordonnée en fonction des autres, c'est à dire la trajectoire pure de l'objet.

Nous retrouverons cette démarche dans toutes les analyses de trajectoire à base de mécanique Newtonienne.

3. Modèle simple de chute libre

a) Fusée expérimentale de courte portée

La façon la plus instructive d'aborder les méthodes détaillées plus haut est de les appliquer avec un exemple simple.

Imaginons donc une petite fusée expérimentale de masse de 10 kg (que nous considérerons constante). Elle accélère le long d'un rail incliné à 30° par rapport à la verticale. Lorsqu'elle arrive au bout du rail, le moteur est coupé ; son altitude est alors de 15m et sa vitesse de 100 m/s.

- Quel est le temps de vol ?
- Quelle est l'altitude maximale atteinte ?
- Quelle est la portée du tir ?

b) Limites du modèle orthogonal

Il est tentant d'utiliser les équations de mouvement obtenues ci-haut pour étudier la trajectoire de la fusée lorsque l'on allonge le tir.

Pourtant, dès que l'on dépasse quelques kilomètres de portée, deux problèmes importants viennent compliquer l'analyse, du fait de la courbure de la Terre :

- La surface du sol, modélisée par l'altitude zéro (abscisses), se dérobe sous l'horizontale au fur et à mesure que l'on s'éloigne du pas de tir ;
- La gravité s'applique toujours à la verticale, mais cette « verticale », perpendiculaire à la surface terrestre, vient prendre une composante sur l'axe des abscisses.

On perçoit ainsi les limites des coordonnées rectangulaires utilisées plus haut. Les coordonnées polaires permettront de faciliter l'analyse du comportement du projectile.

4. Chute libre à la surface d'une planète

a) Coordonnées polaires

Pour pouvoir plus facilement exprimer les trajectoires à la surface de la Terre de façon mathématique, il est judicieux d'employer un système de coordonnées polaires. Nous nous contenterons ici d'en présenter les grandes lignes.

On définit les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_\perp}$ et $\vec{e}_r$, qui ont la particularité de se déplacer avec l'objet étudié.

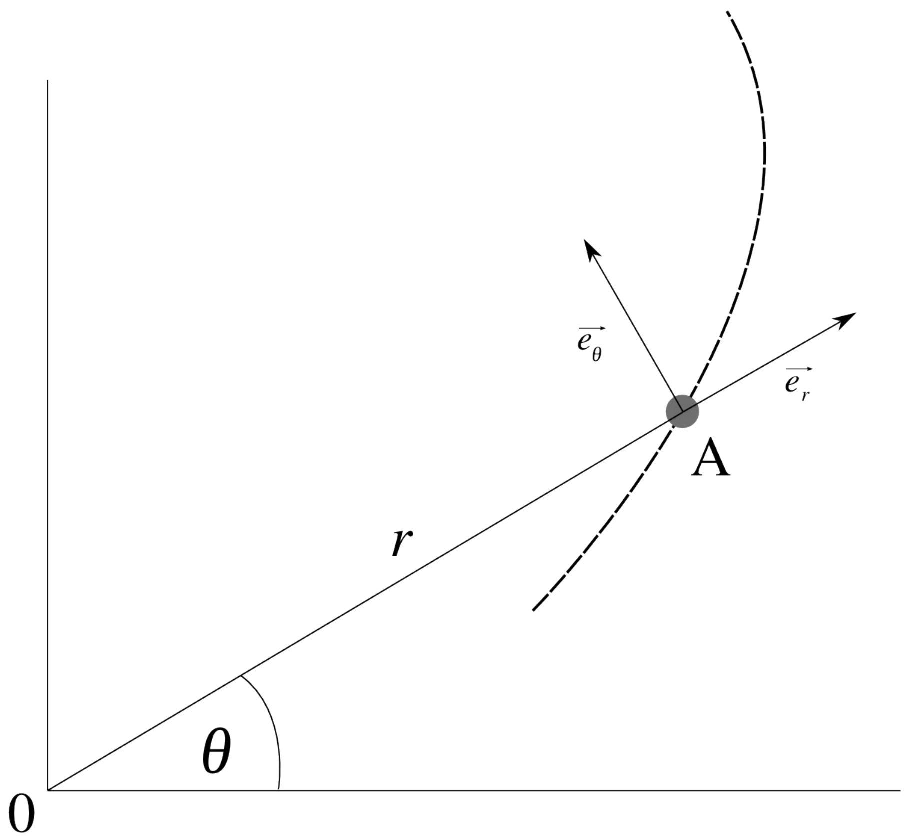


Figure 1.4
Système de coordonnées polaires

Le vecteur $\vec{r}$ suffit alors à décrire la position de A, de sorte que $\vec{r} \equiv r\vec{e}_r$.

En définissant $\vec{v}$, le vecteur vitesse de A, et, $\vec{a}$ son vecteur accélération (tels que $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ et $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$), on montre que l'on peut décrire $\vec{a}$ comme la somme des deux vecteurs :

$$\vec{a} = (\quad a_r \quad) \; \vec{e_r} + (\quad a_\perp \quad) \; \vec{e_\perp}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \; \vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \; \vec{e_\perp} \qquad \text{(I-4.1)}$$

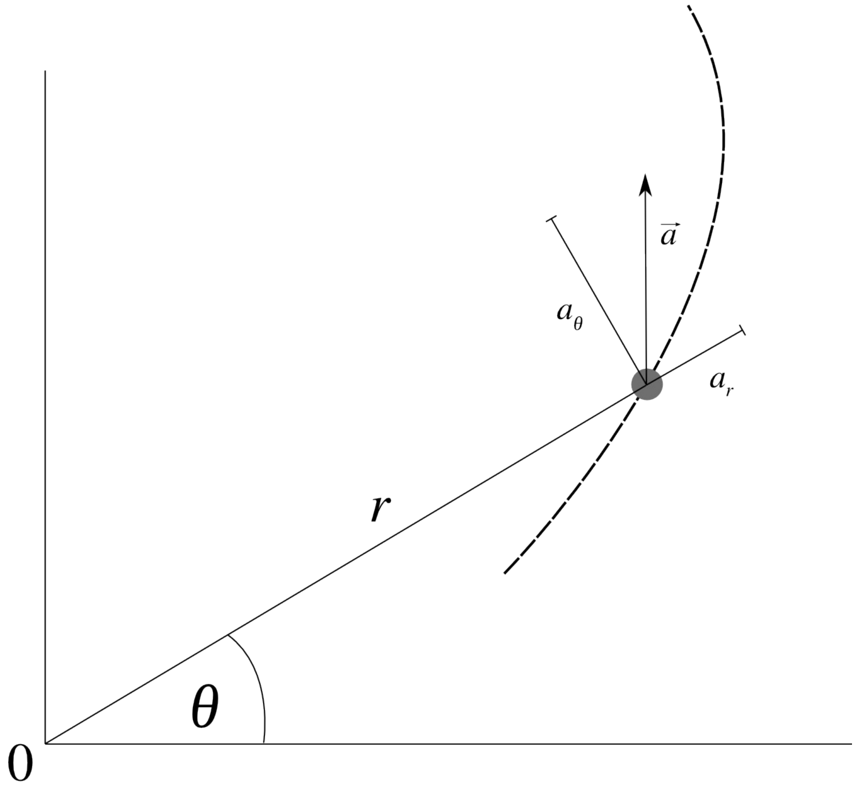


Figure 1.5
Accélération exprimée selon des coordonnées polaires

Cette équation (I-4.1) permet d'exprimer toute accélération selon deux termes, l'un radial (multiple de $\vec{e_r}$), et l'autre orthogonal (multiple de $\vec{e_\perp}$).

On peut la reformuler avec un doublet d'équations, l'une dans la direction radiale et l'autre dans la direction orthogonale :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\perp = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Il se trouve que dans la première équation $r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r} v_\perp^2$, et que dans la seconde

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{\mathrm{d}}{dt}(r\, v_\perp) \quad .$$

Reformulons alors le doublet d'équations :

$$a_r = \ddot{r} - \frac{v_\perp^2}{r} \tag{I-4.2}$$

$$a_\perp = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left(r\ v_\perp\right) \tag{I-4.3}$$

Il faut bien insister sur le fait que cette paire d'équations (I-4.2/3) n'a rien de physique — elle ne décrit aucune trajectoire particulière. Il s'agit seulement d'une description mathématique d'un mouvement entièrement arbitraire.

b) Le mouvement de chute libre en coordonnées polaires

L'intérêt des coordonnées polaires est ici. Désormais, nous plaçons notre origine au centre de la Terre : la force de gravitation *est toujours dirigée dans la direction radiale* (celle de $\vec{r}$). Elle sera absente de tous les termes orthogonaux, ce qui allège nos équations de façon appréciable.

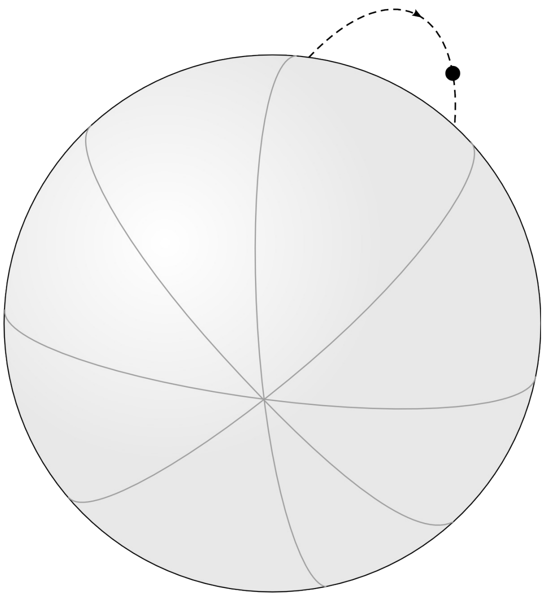


Figure 1.6 : mouvement de chute libre arbitraire autour d'une planète.

Pour décrire le mouvement d'un corps de masse m en chute libre dans ce repère, on applique la relation $\Sigma \vec{F} = m\ \vec{a}$ dans chacune des directions r et $\perp$ respectivement :

$$\Sigma \vec{F}_r = m\ \vec{a}_r$$

$$-\frac{P}{m} = \ddot{r} - \frac{v_\perp^2}{r} \tag{I-4.4}$$

$$\Sigma \vec{F}_\perp = m \vec{a}_\perp$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left(r\, v_\perp\right) \qquad \text{(I-4.5)}$$

Ce système d'équations peut être utilisé pour décrire un mouvement de chute libre. Le comportement de n'importe quel corps qui est soumis uniquement à la gravité pourra être décrit avec deux expressions $r(t)$ et $\theta(t)$ qui solutionneront les deux équations ci-dessus.

On utilise aussi couramment une équation de trajectoire, de la forme $r(\theta)$, que nous aurons l'occasion d'étudier au cours II.

c) Une première approche de la chute libre en équations polaires

Le système d'équations ci-dessus n'a rien d'accueillant pour l'étudiant/e accoutumé/e aux équations en coordonnées orthogonales — et pour cause : il apparaît rapidement que le rayon r, l'angle θ, et les vitesses et accélérations radiales et orthogonales sont *tous intrinsèquement liés*. Il n'y a pas d'équation de trajectoire simple qui satisfasse les conditions imposées par une chute libre arbitraire autour d'une planète !

Afin d'explorer progressivement la forme que prendra finalement une solution complète aux équations ci-dessus, nous pouvons simplifier notre cas d'étude.

Si nous revenons à notre petite fusée expérimentale, nous pouvons nous limiter à une faible variation d'altitude — par exemple, quelques centaines de mètres : le rayon r par rapport au centre de la Terre varie très peu[1]. Comme le produit $r\, v_\perp$ reste constant le long de la trajectoire (I-4.5) il est raisonnable de considérer $v_\perp$ et $v_\perp^2/r$ comme étant constants également.
Dans ce cas bien particulier le couple d'équations (I-4.4/5) se simplifie alors pour donner :

$$\ddot{r} = \frac{v_\perp^2}{r} - \frac{P}{m} \approx cst \qquad \text{(I-4.6)}$$

$$v_\perp \approx cst \qquad \text{(I-4.7)}$$

1 Un rapide calcul révélera qu'il s'agit d'une variation de moins d'un six-millième.

Ces deux équations nous permettent de prévoir le point de chute du projectile, et surtout de se donner une meilleure représentation de sa trajectoire. Elles ne donneront des résultats corrects que lorsque le rayon varie très faiblement. Nous prendrons garde à ne pas l'utiliser en dehors de notre cas d'étude bien particulier[2].

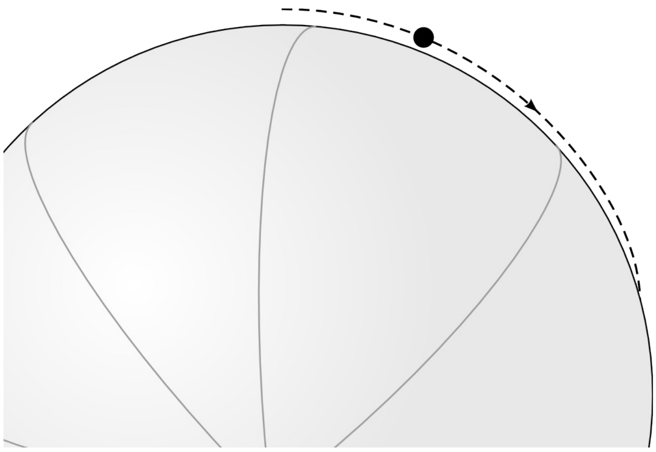


Figure 1.7 : Trajectoire de chute libre autour d'une planète.
Lorsque le rayon varie peu (l'illustration exagère cette variation), la vitesse orthogonale $v_\perp$ *est approximativement constante, de même que la valeur* $\ddot{r}$ *.*

Notons enfin que le poids P varie avec l'altitude, même si ces variations peuvent être négligées à proximité de la surface terrestre. Nous aurons soin d'étudier ces subtilités dans le cours II.

d) Mouvement de chute libre circulaire

Nous pouvons faire notre jeu du système d'équations (I-4.4/5) en imposant une trajectoire circulaire. Notre lancer est alors tel que le corps en chute libre ne retombe jamais, sa portée excédant la circonférence terrestre.

Mathématiquement, en imposant à notre sujet une trajectoire circulaire, nos équations de mouvement sont grandement simplifiées. Nous avons $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$ et l'accélération radiale a_r s'exprime selon :

$$a_r = -\frac{v_\perp^2}{r} \qquad \text{(I-4.8)}$$

pour n'importe quel mouvement circulaire,
où a_r est l'accélération radiale (m/s²),

2 Quelques notions plus solides de mécanique du solide permettront de montrer que ce modèle échoue lamentablement lorsque la portée du lancer dépasse la demi-circonférence terrestre.

$v_\perp$ est la vitesse (tangentielle à la trajectoire strictement circulaire) (m/s),
et r est le rayon de la trajectoire (m).

Dans le cas où c'est le poids de l'objet qui provoque sa rotation, nous avons :

$$a_r = -\frac{P}{m} = -\frac{v_\perp^2}{r} \tag{I-4.9}$$

pour un mouvement de chute libre circulaire,
où P est le poids s'appliquant sur l'objet (N),
et m sa masse (kg).

Il s'agit, bien sûr, d'une orbite, et en particulier d'une orbite circulaire. Nous aurons le loisir d'étudier ces trajectoires plus avant au *cours II : Trajectoire du satellite*.

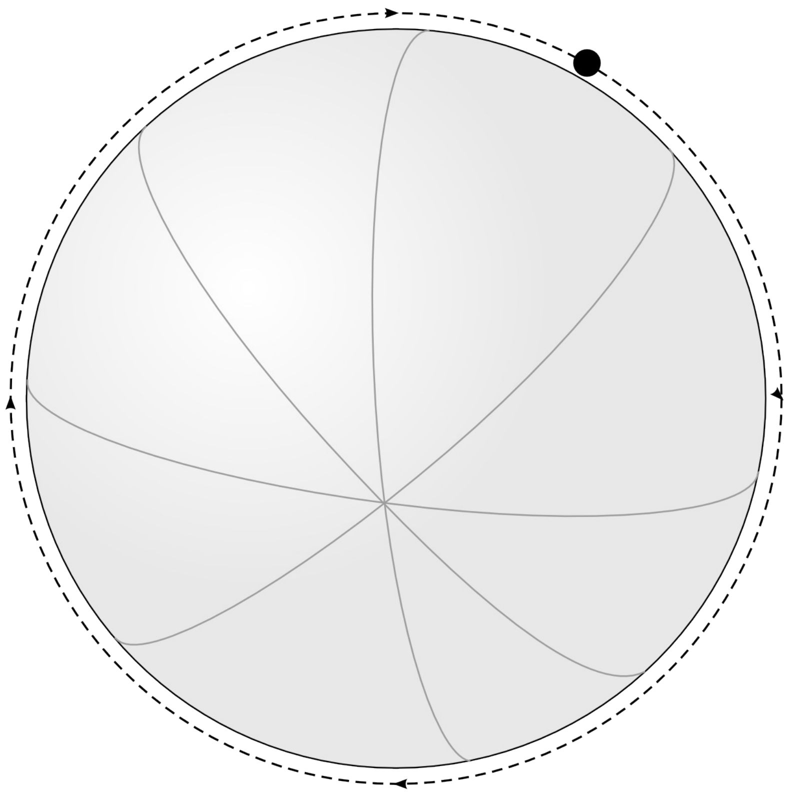


Figure 1.8 : trajectoire de chute libre infinie : l'orbite circulaire.