

Mémo de cours n°2

Somme vectorielle

v1.3

CC-BY-SA Olivier Cleynen – introméca.ariadacapo.net

2.1 Notion de vecteur

2.1.1 Notation

Certaines propriétés en physique (par exemple, la position dans l'espace, ou la vitesse) possèdent non seulement une grandeur mais aussi une direction et un sens. Elles peuvent être décrites à l'aide d'entités nommées *vecteurs*.

Un vecteur peut être représenté par un segment dont la longueur est proportionnelle à la grandeur qu'il représente, et dont la direction est la même que la ligne d'action de la propriété.

Plusieurs conventions peuvent être adoptées pour représenter un vecteur, parmi lesquelles :

- Deux lettres capitales surmontées d'une flèche : \overrightarrow{AB} (A représentant alors le point de départ et B celui d'arrivée) ;
- Une lettre surmontée d'une flèche : \vec{c} (on peut alors interpréter cette lettre comme étant le « nom » du vecteur) ;
- L'utilisation du soulignage (\underline{AB} , \underline{c}) ou du graissage (\mathbf{AB} , \mathbf{c}) (une utilisation fréquente dans la littérature anglophone mais que nous n'utiliserons pas ici) ;
- L'utilisation de vecteurs unitaires : $x\vec{i} + y\vec{j}$, où \vec{i} et \vec{j} définissent deux directions différentes suffisantes pour décrire le vecteur ;
- Une colonne de matrice : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où x et y sont les coordonnées du vecteur.

Ces notations équivalentes entre elles doivent être différenciées de la simple notation « AB » ou « c » qui représente la *norme* (encore appelée *module* ou *longueur*) du vecteur.

2.1.2 Composantes d'un vecteur

L'origine O de tout vecteur \overrightarrow{OA} dans un espace à trois dimensions peut être utilisé comme origine d'un système d'axes orthogonaux. Si le point A a pour coordonnées

(x_A, y_A, z_A) alors les vecteurs $x_A \vec{i}$, $y_A \vec{j}$ et $z_A \vec{k}$ sont les *vecteurs composants* du vecteur \vec{OA} . Les longueurs x_A , y_A et z_A sont appelées les *composantes de A* selon les trois axes choisis.

$$\vec{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} \quad (2/1)$$

Le *module* de \vec{OA} , parfois appelée norme, est la longueur OA , et notée $|\vec{OA}|$:

$$OA \equiv |\vec{OA}| \quad (2/2)$$

Par application du théorème de Pythagore, on peut quantifier la norme d'un vecteur si l'on connaît ses coordonnées :

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} \quad (2/3)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (2/4)$$

2.2 Somme vectorielle

2.2.1 Somme de deux vecteurs

Lorsque l'on additionne deux vecteurs, la somme (parfois appelée *résultante*) obtenue a des coordonnées chacune égale à la somme des coordonnées des composantes.

$$\vec{OA} + \vec{OB} = (x_A + x_B) \vec{i} + (y_A + y_B) \vec{j} + (z_A + z_B) \vec{k} \quad (2/5)$$

D'une façon générale le point de référence pour effectuer la somme peut être différent de O . Si l'on a $\vec{e}(x_e, y_e, z_e) = \vec{AB}$ et $\vec{f}(x_f, y_f, z_f) = \vec{CD}$, alors

$$\vec{e} + \vec{f} = (x_e + x_f) \vec{i} + (y_e + y_f) \vec{j} + (z_e + z_f) \vec{k} \quad (2/6)$$

où x_e est la composante sur x du vecteur \vec{e} , a pour valeur $(x_B - x_A)$, et peut être négative.

Il en va de même pour y_e , z_e , et les composantes de \vec{f} .

Une somme vectorielle en deux dimensions est représentée en figure 2.1.

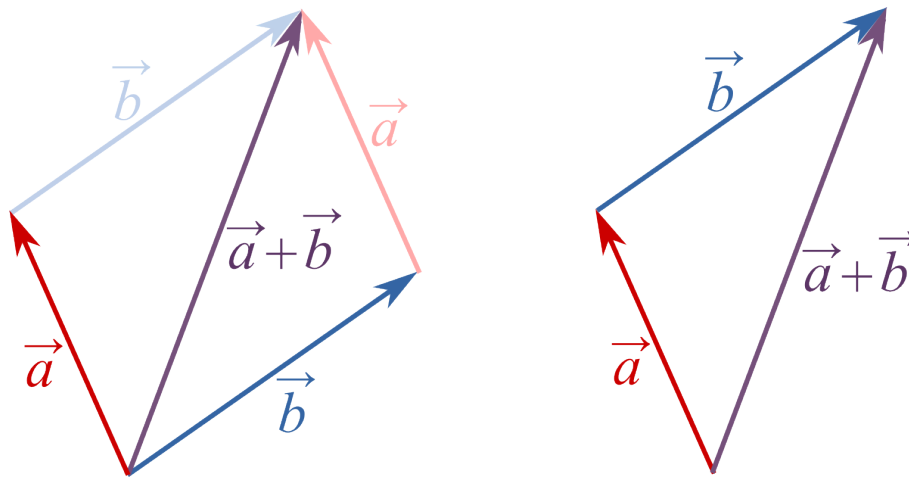


FIGURE 2.1 – Le vecteur \vec{c} tel que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Insistons immédiatement sur le fait que la longueur $|\vec{e} + \vec{f}|$ n'est pas égale à $|\vec{e}| + |\vec{f}|$ (excepté le cas particulier où les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens).

On a ainsi :

$$|\vec{e} + \vec{f}| = \sqrt{(x_e + x_f)^2 + (y_e + y_f)^2 + (z_e + z_f)^2} \quad (2/7)$$

2.2.2 Vecteur opposé et soustraction de vecteurs

Le vecteur \vec{a} est l'*opposé* du vecteur \vec{b} si leur somme est égale au vecteur nul ($\vec{0}$ de coordonnées $(0, 0, 0)$). On écrit alors $\vec{a} = -\vec{b}$.

De fait l'addition de vecteurs nous permet de décrire une soustraction vectorielle ainsi :

$$\vec{e} - \vec{f} = (x_e - x_f)\vec{i} + (y_e - y_f)\vec{j} + (z_e - z_f)\vec{k} \quad (2/8)$$

Une soustraction vectorielle en deux dimensions est représentée en figure 2.2.

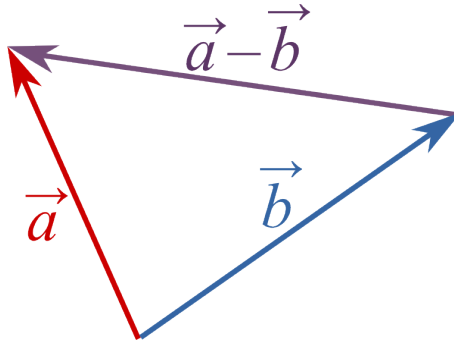


FIGURE 2.2 – Le vecteur \vec{c} tel que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

Prenons encore une fois la peine d'insister sur le fait qu'en général la longueur $|\vec{e} - \vec{f}|$ n'est pas égale à $|\vec{e}| - |\vec{f}|$.

2.3 Utilisation des vecteurs en physique

2.3.1 Comparaison des vitesses

L'application la plus visuelle des vecteurs en physique est probablement l'addition des vitesses. Les vitesses de plusieurs corps peuvent en effet être comparées les unes aux autres et quantifiées aisément, quelque soit leur direction. Par exemple, si \vec{V}_{ArB} représente la vitesse d'un corps A par rapport à un corps B , on peut écrire :

$$\vec{V}_{ArB} = \vec{V}_{ArC} + \vec{V}_{CrB} \quad (2/9)$$

Autrement dit, en termes de vecteurs, la vitesse de A par rapport à B est égale à la vitesse de A par rapport à C additionnée à la vitesse de C par rapport à B . En termes de valeurs absolues (c'est à dire de vitesses mesurées en pratique) cette relation est très difficile à articuler pour un cas général à cause des angles relatifs. L'utilisation de vecteurs la rend générale quelques soient les directions en jeu.

On peut utiliser autant de points que l'on le souhaite, ainsi :

$$\vec{V}_{ArB} = \vec{V}_{ArC} + \vec{V}_{CrD} + \vec{V}_{DrB} \quad (2/10)$$

2.3.2 Autres utilisations

D'une façon générale la notion de vecteur est utile pour décrire toute grandeur qui a plusieurs composantes indépendantes. On peut s'en servir pour décrire, comparer et additionner :

- Les forces ;
- Les positions, les vitesses et les accélérations ;
- Les torseurs.

Nous verrons que l'on peut dériver ou multiplier les vecteurs, ce qui en fait des outils très puissants. Il est laissé à l'étudiant/e le loisir de découvrir les nombreuses autres applications non citées ici.

Bureau d'études n°2

v1.3

CC-BY-SA Olivier Cleynen – introméca.ariadacapo.net

2.1 Vitesse d'évolution d'une barge

Un ensemble de 12 barges de masse 1 500 t chacune, est tracté par un remorqueur capable d'évoluer à une vitesse de 5 m s^{-1} sur un fleuve de largeur 500 m et de vitesse d'écoulement 2 m s^{-1} (que nous supposons uniforme). L'ensemble quitte le rivage et l'objectif pour l'équipage du remorqueur est d'amener les barges de l'autre côté du fleuve.

1. Quel angle le convoi doit-il adopter par rapport à la rivière pour la traverser perpendiculairement ?

L'exploitant du remorqueur souhaite transférer les barges vers un port situé 2 km en amont, sur la rive opposée du fleuve.

2. Quelle doit être la vitesse minimale du remorqueur par rapport à l'eau pour permettre le transfert en moins de 10 min ?

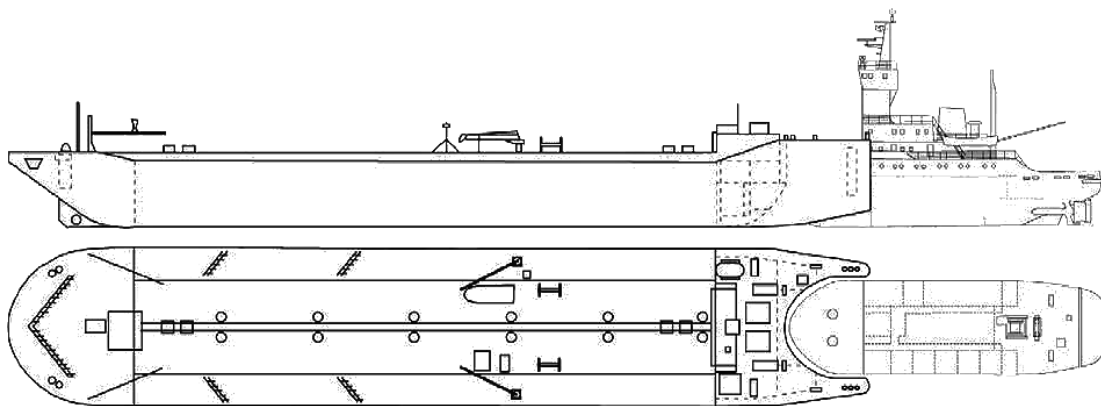


FIGURE 2.3 – Un exemple de barge conçue pour être pilotée efficacement par un remorqueur.

Source inconnue

2.2 Guidage d'un avion au radar

Vous êtes commandant/e à bord d'un important navire militaire. L'équipage d'un avion en détresse vous contacte en demandant la position de l'aéroport le plus proche.

À l'aide du radar embarqué à bord du navire, vous mesurez la position relative de l'aéronef à 3 km Zénith, 12 km Sud, et 3 km Est, et sa vitesse relative à 200 km/h Nord. Le navire se déplace plein Est avec une vitesse de 10 km/h.

Vous mesurez également la position relative d'une balise radio placée sur la côte : elle se situe à 1,2 km d'altitude, 30 km au nord, et 0,5 km à l'est du navire.

Votre documentation vous indique que la balise est située à 15 km au nord et 3 km à l'ouest de l'aéroport le plus proche, qui est au niveau de la mer.

1. Quelle est la position relative de l'avion par rapport à l'aéroport, et la distance qui les sépare ?
2. Quel cap donnez-vous à l'avion pour qu'il rejoigne l'aéroport au plus vite ?

2.3 Hélitreuilage en mer

Vous êtes pilote d'hélicoptère et vous préparez une mission d'hélitreuilage au dessus d'un navire.

Le cap du navire est de 20° ; il évolue à une vitesse (mesurée par rapport à l'eau) de 22 km/h. Une consultation météo vous indique que le courant local a pour vitesse 1 m s^{-1} en direction Est, et que le vent vient du Sud avec une vitesse de 15 m s^{-1} .

Vous approchez le navire avec votre AS365 et son équipage. Quel cap et quelle vitesse air devez-vous adopter pour vous maintenir immobile au dessus du pont du navire ?

Capacity	11 pax
Length	13,7 m
Rotor diameter	11,9 m
Height	4,1 m
OWE	2 411 kg
MTOW	4 300 kg
Powerplant	2 × Turboméca Arriel 2C (single turboshaft, 838 shp (625 kW) each)
Maximum speed	306 km h ⁻¹
Maximum rate of climb	8,9 m s ⁻¹
Service ceiling	19 200 ft

TABLE 2.1 – Caractéristiques de l'AS365 Dauphin.

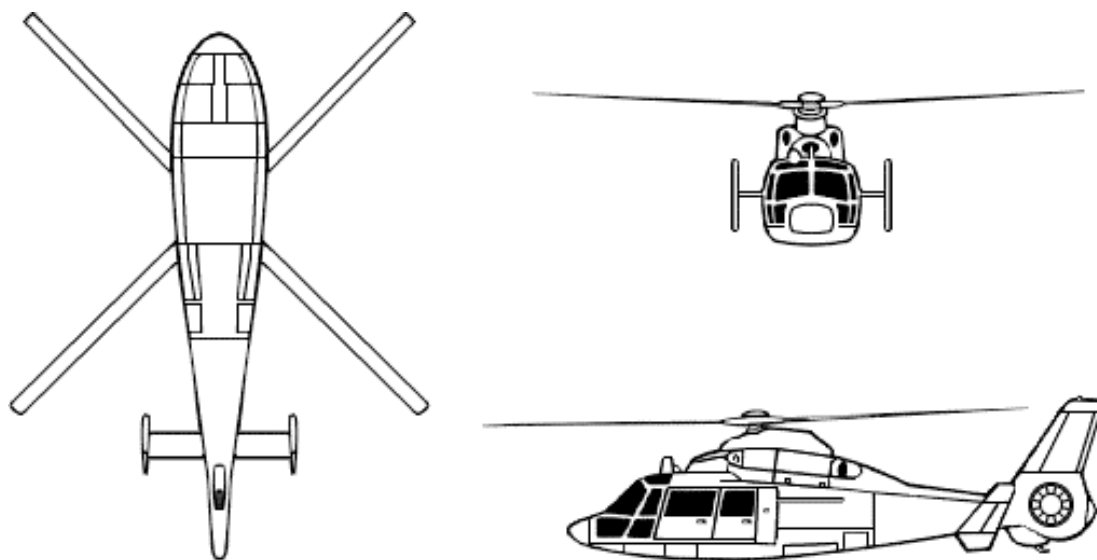


FIGURE 2.4 – Eurocopter AS365 Dauphin, hélicoptère de taille moyenne produit en 800 exemplaires environ. Jadis le fer de lance d'Aérospatiale, il succède à l'Alouette III.

Plan domaine public NASA

2.4 Pales d'hélicoptère

Un hélicoptère dont les caractéristiques sont détaillées plus bas est en vol à la vitesse de 150 km/h. Le rotor bi-pale tourne à la vitesse de 250 tours/min, dans le sens anti-horaire.

1. Représentez graphiquement et calculez la vitesse relative à l'air de deux segments de pales de rotor, l'un à 1 m du centre du rotor et l'autre à l'extrémité de pale,
 - Lorsque la pale est au dessus de la queue de l'appareil (position 6 h) ;
 - Lorsque la pale est à la droite de l'appareil (position 3 h) ;
 - Lorsque la pale est à gauche de l'appareil (position 9 h).
2. Quelles sont les conséquences sur la portance que peut générer une pale au fur et à mesure qu'elle tourne autour du rotor ? Quel(s) mécanisme(s) est/sont utilisé(s) pour maîtriser cela ?

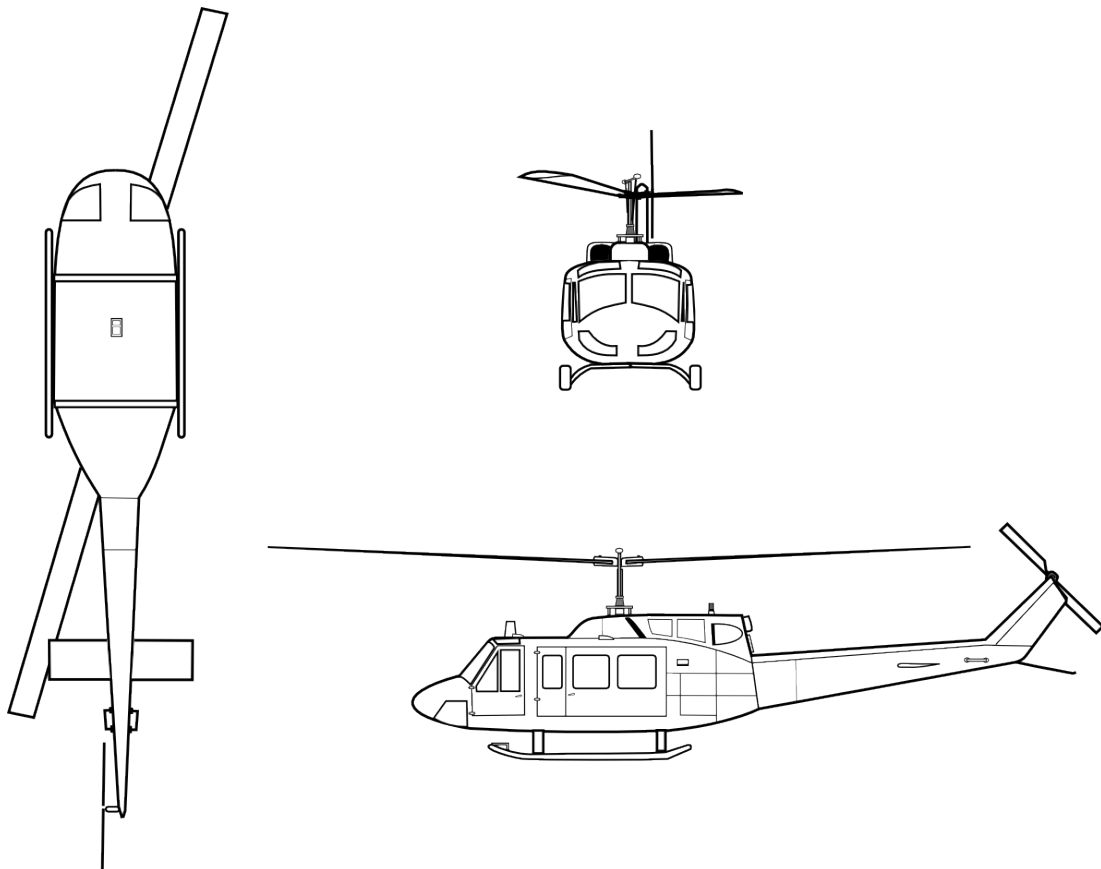


FIGURE 2.5 – Bell 212 *Twin Huey*, produit en plus de 1 000 exemplaires entre 1968 et 1998 sous différentes désignations.

Plan CC-BY par l'utilisateur-riche Commons Jetijones

Length	17,4 m
Rotor diameter	14,6 m
Height	3,83 m
OWE	2 960 kg
MTOW	5 080 kg
Engine	1 × Pratt & Whitney Canada PT6T-3 (double turboshaft) 1 800 shp (1 342 kW)

TABLE 2.2 – Caractéristiques du Bell 212.

2.5 Vitesses d'un avion

Vous êtes aux commandes d'un Beechcraft B200, en croisière au niveau 250, et vous faites route en direction de l'aéroport de Nice. Le vent à votre altitude est négligeable ; votre cap est de 110° .

La contrôleuse à l'aéroport de Nice mesure votre position à 8 km au sud, et 32 km à l'ouest de l'aéroport. Pour cela elle utilise un radar positionné à Caussols (4 km au nord et 22 km à l'ouest), à une altitude de 1 335 m.

1. Quelle distance exactement vous sépare du radar ?

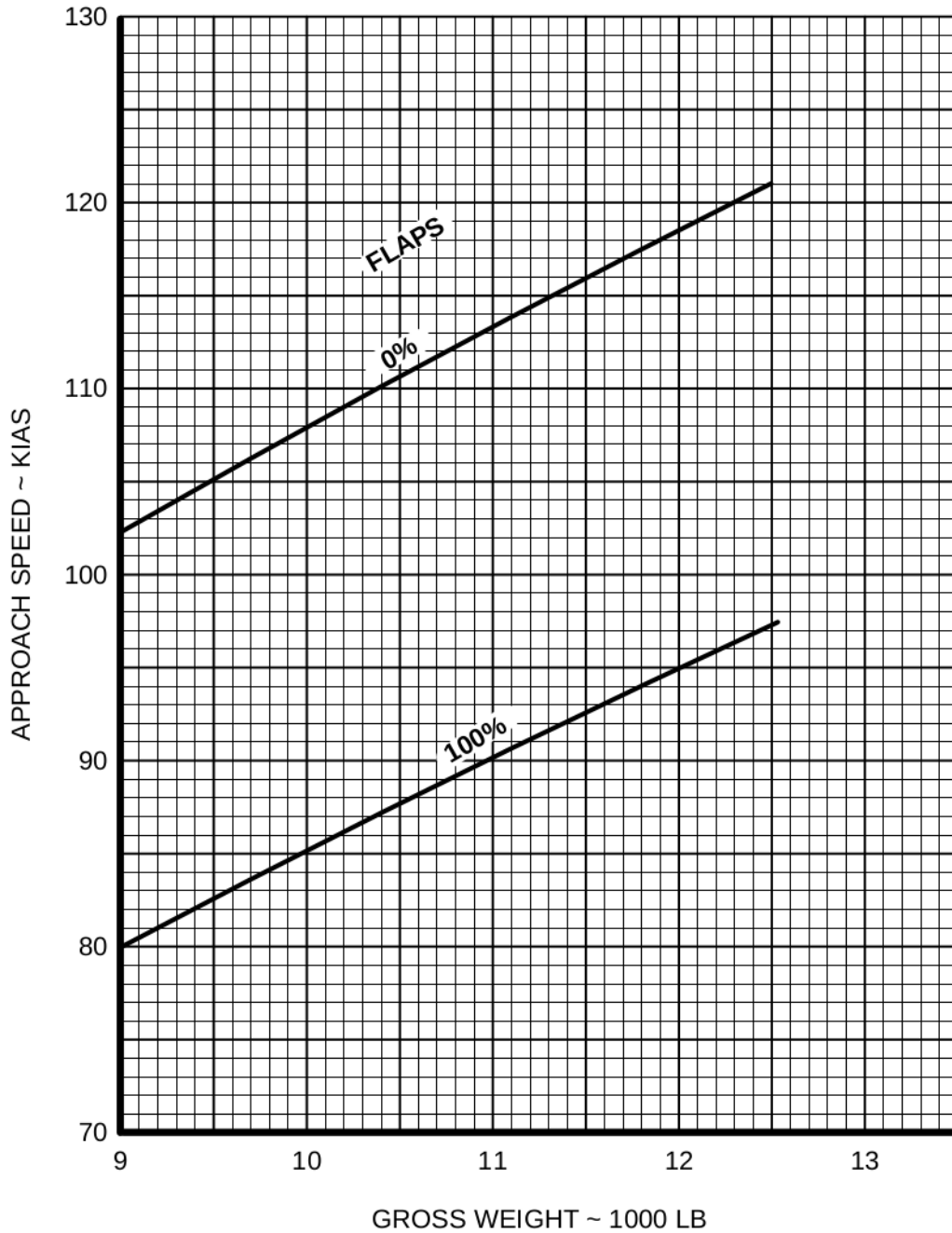
En effectuant plusieurs mesures la contrôleuse détermine qu'un autre appareil au nord-est de votre position se déplace avec un vecteur vitesse de 125 m s^{-1} ouest, 12 m s^{-1} nord, et 2 m s^{-1} vertical.

2. Quelle est la vitesse de l'autre appareil par rapport à vous-même ?

Pendant la fin de la croisière, vous préparez la phase d'approche finale. Le bulletin météo annonce un vent orienté vers 315° pour 27 kts au sol et vous prévoyez un atterrissage en piste 04L. Le plan d'approche prévu est de $3,5^\circ$ par rapport à l'horizontale. Les vitesses d'approches sont recensées dans le manuel de vol et présentées en figure 2.6.

3. Quelle sera votre vitesse par rapport au sol en courte finale ?
4. Quel cap adopterez-vous en courte finale ?
5. Si vous ne modifiez pas le cap de l'avion à l'arrondi, quelle sera la vitesse latérale (en dérapage) des roues lors du toucher ?

LANDING APPROACH SPEEDS



5-124

FAA-Approved: Revision IR: April 29, 2009

FIGURE 2.6 – Vitesse d’approche du B-200 en fonction de sa masse (extrait du manuel de vol).

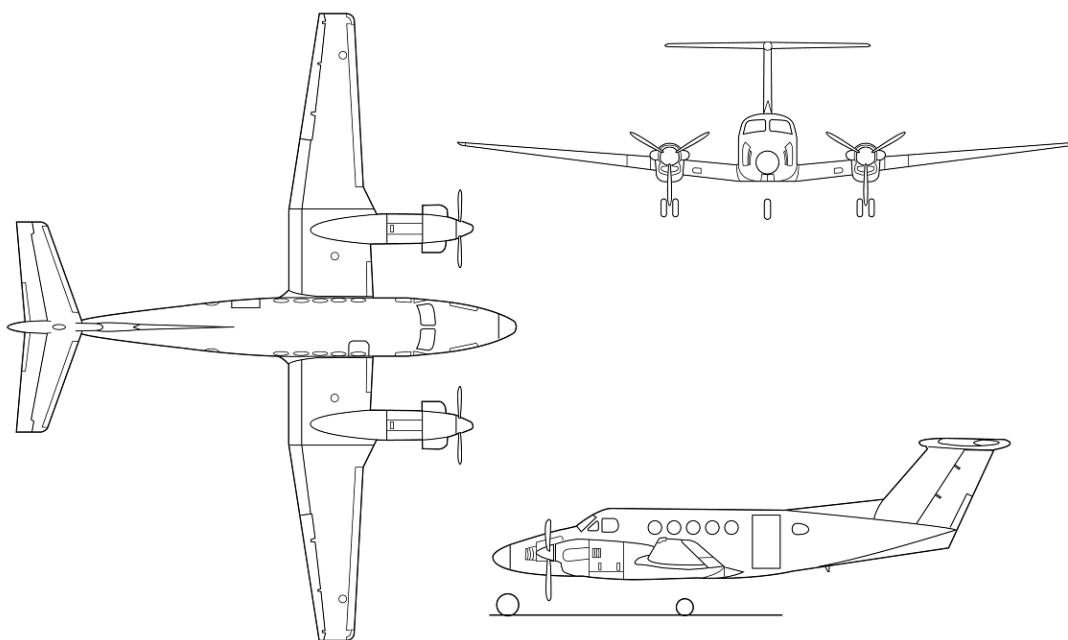


FIGURE 2.7 – Beechcraft B200 King Air, en production depuis 1972 (3 500 exemplaires vendus)

Plan domaine public NASA

Crew	1-2
Capacity	13 pax
Length	13,34 m
Wingspan	16,61 m
Height	4,57 m
Wing area	28,2 m ²
OWE	3 520 kg
MTOW	5 670 kg
Powerplant	2 × P&WC PT6A-42, 850 shp (635 kW) each
Maximum speed	294 kts @ 25 000 ft
Cruise speed	289 kts @ 25 000 ft (max cruise)
Stall speed	75 kts IAS (full flaps)
Minimum Control speed	78 kts IAS (full flaps)
Range	3 338 km with max. fuel and 45 min res.
Service ceiling	35 000 ft
Rate of climb	2 450 ft/min
Wing loading	201,6 kg m ⁻²
Power/mass	220 W kg ⁻¹

TABLE 2.3 – Caractéristiques du B-200