Mémo de cours n°3

Force et accélération

v1.1.1

3.1 Vecteur dérivé d'un vecteur

Il arrive souvent qu'un vecteur décrivant une propriété d'un corps change dans le temps. Pendant un intervalle de temps Δt, le vecteur peut avoir varié depuis $\overrightarrow{a_1}$ jusqu'à $\overrightarrow{a_2}$.

La *variation moyenne* d'un vecteur $\vec{a}$ pendant un intervalle Δt est un vecteur. Il est défini comme :

$$\overrightarrow{b_{moyen}} = \frac{\overrightarrow{\Delta a}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}}{\Delta t} \tag{3/1}$$

Lorsque l'intervalle Δt tend vers zéro, ce vecteur se rapproche du taux de variation du vecteur $\vec{a}$. Le cas limite indique la valeur instantanée de $\vec{b}$ à un point. On dit que $\vec{b}$ est *le dérivé de $\vec{a}$ dans le temps*.

$$\vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta a}}{\Delta t} \tag{3/2}$$

$$\vec{b} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{b_{moyen}} \tag{3/3}$$

3.2 Position, vitesse et accélération

3.2.1 Vecteur position

On peut décrire la position d'un objet dans l'espace avec un vecteur ; ce vecteur peut changer avec le temps. Ce vecteur position, que nous nommons ici $\vec{r}$, peut être défini avec n'importe quel système de coordonnées.

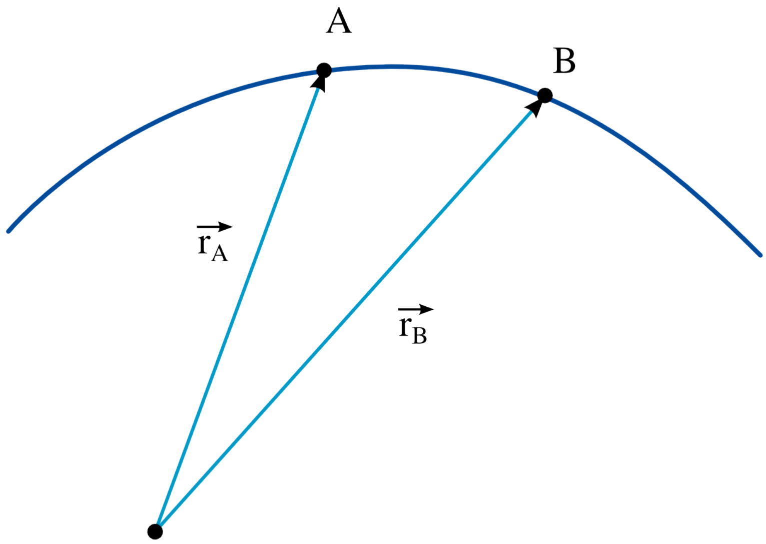

FIGURE 3.1 – La position d'un objet par rapport à un point de repère peut être représentée avec un vecteur (ici nommé $\vec{r}$).

3.2.2 Vecteur vitesse

Le changement du vecteur position pendant un intervalle de temps donné est nommé *vitesse moyenne*.

$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \tag{3/4}$$

Ce vecteur ne dépend pas du point de référence choisi pour mesurer la position ;[1] il a souvent une direction bien différente de celle du vecteur position.

La dérivée du vecteur position en un point par rapport au temps est nommée *vitesse* et est exprimable selon un vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{3/5}$$

Ce vecteur a rarement la même direction que $\vec{r}$ et ne représente pas du tout la même grandeur (il ne s'additionne pas avec lui, par exemple).

1. Pour peu que ce point soit immobile.

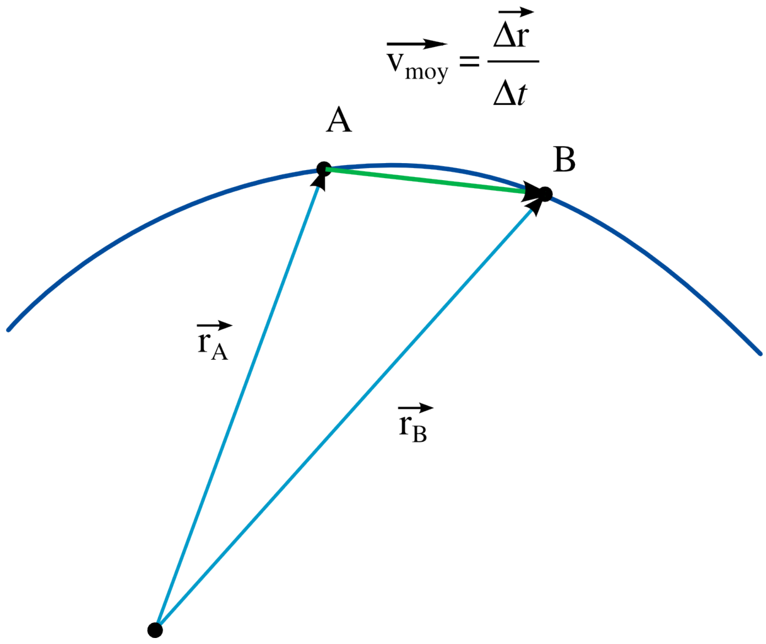

FIGURE 3.2 – Le changement $\vec{\Delta r}$ de vecteur position divisé par l'intervalle Δt pendant lequel il a eu lieu est la vitesse moyenne $\overrightarrow{v_{moy}}$.

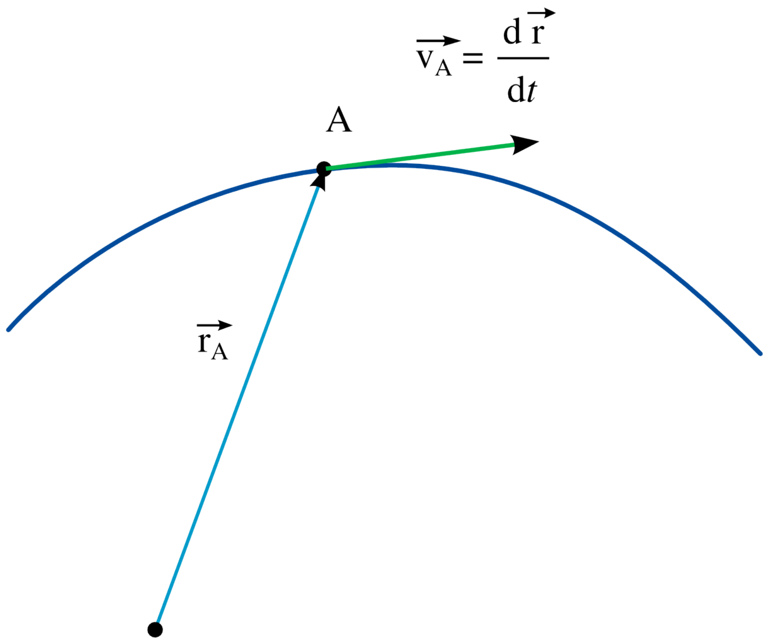

FIGURE 3.3 – Le changement instantané de vecteur position à un point donné est la vitesse $\vec{v}$.

3.2.3 Vecteur accélération

De la même façon que pour le vecteur vitesse avec le vecteur position, l'*accélération moyenne* d'un corps pendant un intervalle Δt est :

$$\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \tag{3/6}$$

La dérivée du vecteur vitesse en un point par rapport au temps est nommée *accélération* et exprimable selon un vecteur $\vec{a}$:

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{3/7}$$

Ce vecteur a rarement la même direction que $\vec{v}$ et ne représente pas du tout la même grandeur.

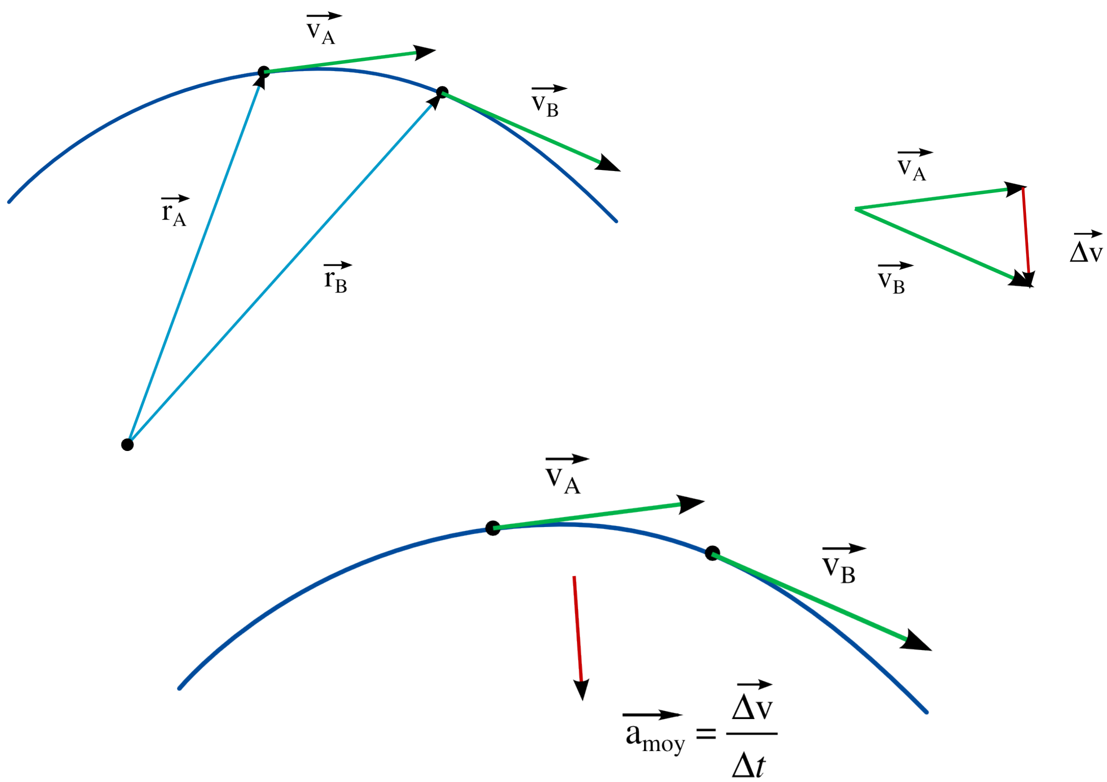

FIGURE 3.4 – Le changement $\vec{\Delta v}$ de vecteur vitesse divisé par l'intervalle de temps Δt pendant lequel il a eu lieu est l'accélération moyenne $\overrightarrow{a_{moy}}$.

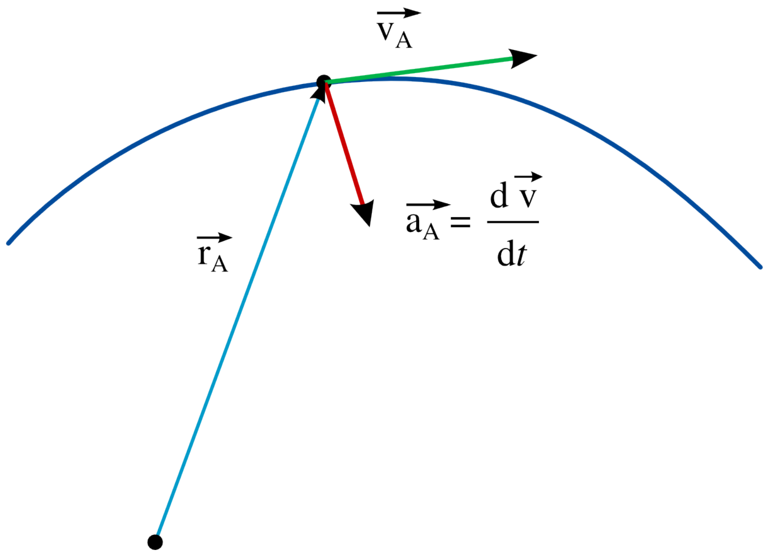

FIGURE 3.5 – Le changement instantané de vecteur vitesse à un point donné est l'accélération $\vec{a}$.

3.3 La seconde loi de Newton

3.3.1 Énoncé

Nous devons à Isaac Newton la découverte d'une loi fondamentale en mécanique, dont l'utilité en ingénierie est sans fin :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \tag{3/8}$$

où $\Sigma\vec{F} \equiv \overrightarrow{F_{net}}$ est la somme nette des forces s'appliquant sur l'objet (N) ;
m est la masse du corps considéré (kg),
et $\vec{a}$ est son accélération ($\mathrm{m\,s^{-2}}$).

Ainsi, il suffit seulement de connaître l'ensemble des forces s'appliquant sur un objet, et sa masse, pour pouvoir déterminer son mouvement dans l'espace. À l'inverse, le mouvement dans l'espace d'un corps et sa masse suffisent à déterminer la somme des forces qui s'appliquent sur lui.

C'est une relation extraordinairement utile et, à ce regard, d'une simplicité stupéfiante.

3.3.2 Importance de la notation vectorielle

Insistons bien sur le fait que l'équation 3/8 est vectorielle, c'est à dire qu'elle n'est pas vraie pour les normes des vecteurs, mais seulement les vecteurs eux-mêmes. Ainsi, il faut appliquer une force sur une automobile pour voir augmenter la vitesse indiquée au compteur ; mais, il faut également appliquer une force pour la faire suivre un virage à vitesse constante. Dans ce dernier cas, la norme du vecteur $\vec{v}$ est constante, mais le vecteur change (puisqu'il change de direction).

On remarque également qu'une accélération peut avoir un sens opposé à celui de la vitesse d'un corps (par exemple dans le cas d'une automobile qui ralentit).

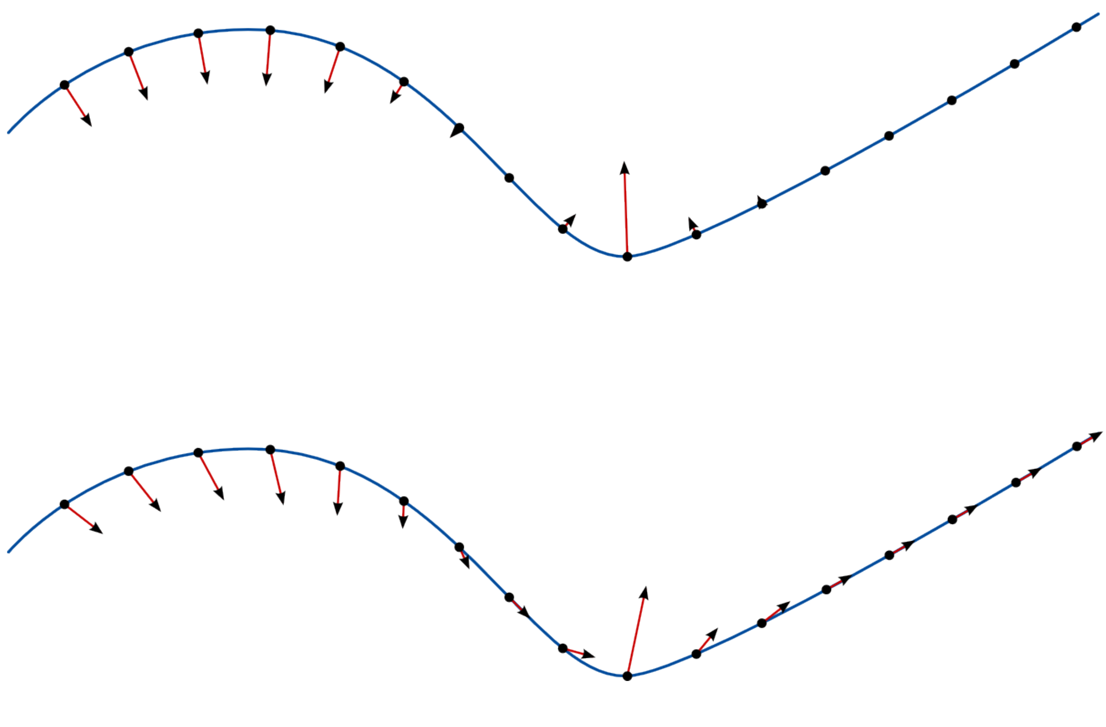

FIGURE 3.6 – Le vecteur accélération d'un corps suivant une trajectoire arbitraire, lorsque sa vitesse linéaire est constante (haut) et variable (bas).

3.3.3 Cause et effet

Une dernière remarque concerne la relation de causalité que l'on est souvent tenté de lire dans cette relation. La seconde loi de Newton n'indique ni spécialement qu'une force nette sur une masse va provoquer son accélération, ni spécialement qu'une accélération va provoquer l'apparition d'une force nette sur cette masse. Plutôt, la relation d'égalité est instantanée : une accélération *est* une force nette, moyennant une constante nommée masse.

Ainsi par exemple, lorsque l'on décrit le comportement de l'air autour du profil de l'aile d'un avion, l'affirmation « l'air est accéléré par la faible pression à l'extrados » n'a ni plus ni moins de sens que son inverse, « l'accélération de l'air à l'extrados provoque une faible pression ». La relation entre force (ou pression) et changement du vecteur vitesse est instantanée.

3.4 Accélération normale et tangentielle

Une relation qui nous intéresse dans le cadre du bureau d'études qui suit relie l'accélération d'un corps à sa vitesse en coordonnées normales et tangentielles.

Pour toute trajectoire continue on peut trouver un centre de courbure instantané à chaque point. On décompose l'accélération $\vec{a}$ en deux composantes, l'une tangente et l'autre normale à la trajectoire :

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} \tag{3/9}$$

On peut exprimer ces vecteurs à l'aide de vecteurs unitaires se déplaçant avec l'objet :

$$\vec{a} = a_T \overrightarrow{u_T} + a_N \overrightarrow{u_N} \tag{3/10}$$

Une démonstration que l'étudiant/e retrouvera dans tout livre de mécanique, mais qui ne nous intéresse pas ici aujourd'hui, permet de montrer que les composantes de l'accélération dépendent de la vitesse et du rayon instantané du corps selon les relations :

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3/11}$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \tag{3/12}$$

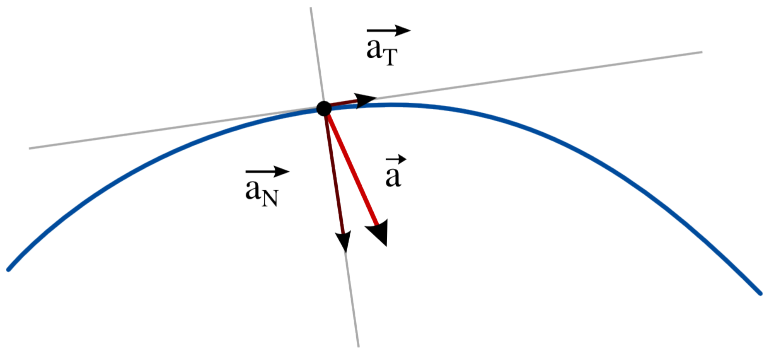

FIGURE 3.7 – Composantes normale (incice N) et tangentielle (indice T) du vecteur accélération.

où a_T et a_N sont les normes des vecteurs accélération dans les directions respectivement tangentielle et normale à la trajectoire ($\mathrm{m\,s^{-2}}$),

v est la norme de la vitesse du corps ($\mathrm{m\,s^{-1}}$),

ρ est le rayon instantané de courbure de la trajectoire (m),

et $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ le changement instantané de la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ ($\mathrm{m\,s^{-2}}$).

Cette écriture et ces relations nous permettent de calculer facilement l'accélération subie par un corps dont on connaît la trajectoire et la vitesse linéaire.

Bureau d'études n°3

v1.1.1

3.1 Manœuvre acrobatique

Vous êtes aux commandes d'un Sukhoi Su-26 (figure 3.8 ; tableau 3.1) en vol inversé rectiligne.

Les ailes de l'appareil sont structurellement capables de supporter 12 fois le poids de l'avion. Votre vitesse importante (250 $\mathrm{km\,h^{-1}}$) vous assure en outre qu'elles sont capables de générer une telle portance sans décrocher. Le moteur, capable de développer une puissance de 360 ch, vous permet aisément de maitenir votre vitesse constante pendant la manœuvre.

Vous amorcez une demi-boucle vers le bas afin de revenir en vol normal, en sens opposé (figure 3.9).

1. Quel rayon de rotation minimal pouvez-vous générer lorsque vous entamez la descente ?

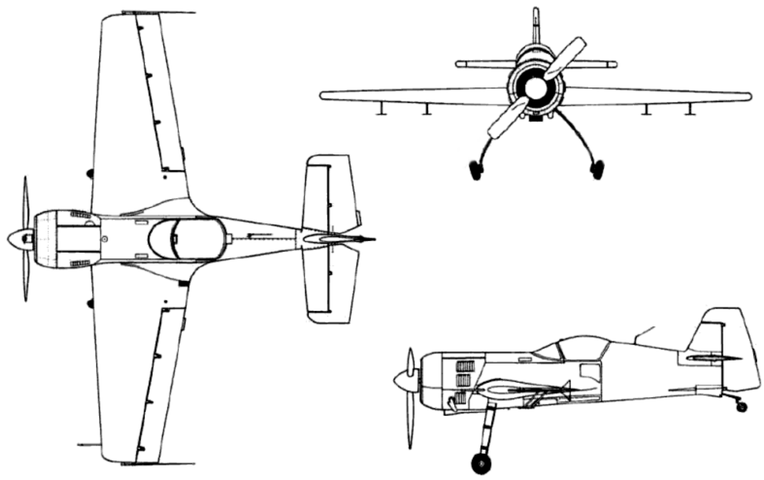

FIGURE 3.8 – Sukhoi Su-26, appareil acrobatique reconaissable à son moteur en étoile (neuf cylindres).

source inconnue

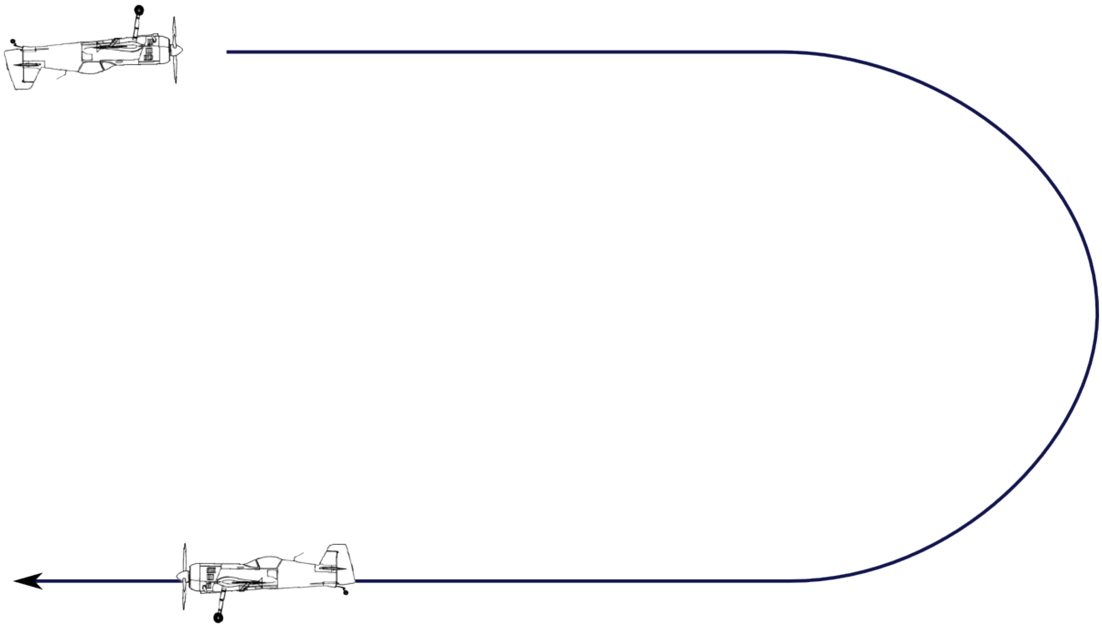

Figure 3.9 – Manœuvre acrobatique de demi-boucle.

2. Quel est le rayon de rotation minimal lorsque vous passez la verticale, et lorsque vous retrouvez l'horizontale ?
3. Quel est ainsi approximativement la perte minimale d'altitude engendrée par la manœuvre ?

Crew	1
Length	6,8 m
Wingspan	7,8 m
Height	2,9 m
Wing area	11,8 m^2
OWE	736 kg
MTOW	1 206 kg
Powerplant	1 × Vedeneyev M-14P radial engine, 270 kW(360 hp)
Maximum speed	450 $km\,h^{-1}$
"Cruise" speed	310 $km\,h^{-1}$
Range	800 km
Service ceiling	12 000 ft
Rate of climb	3 543 ft/min
Max. load factors	−10 G/+12 G

Table 3.1 – Caractéristiques du Su-26

3.2 Train pendulaire

Un train de masse 400 t est posé sur 56 essieux et parcourt une voie ferrée en virage de rayon 2 km. La voie est inclinée de 5° vers l'intérieur du virage.

1. Quelle est la vitesse maximale à laquelle le train peut parcourir le virage sans que les passagers ressentent un déport vers l'extérieur du virage ?

Pour augmenter la vitesse des trains sans modifier le tracé de la voie, on installe un système de bogies pendulaires qui permettent au train de s'incliner de 8° en virage.

2. Quelle est la nouvelle vitesse à laquelle le train peut parcourir le virage sans inconfort des passagers ?
3. Quel est alors l'effort latéral transmis aux rails par chaque essieu ?

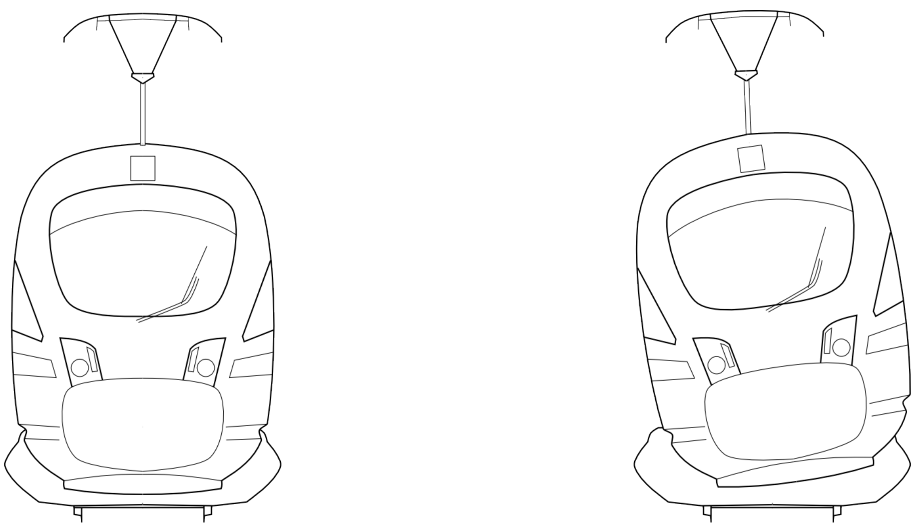

FIGURE 3.10 – Train pendulaire ICE T. L'inclinaison maximale de la carlingue est de 8° ; le pantographe s'incline jusqu'à 6° en direction opposée.

3.3 Performances d'une Formule 1

Une voiture de classe Formule 1 a pour masse 650 kg avec pilote, et est dotée d'un moteur de puissance 750 ch.

Les pneus de la voiture lui permettent d'exercer une force sur le sol pour modifier sa vitesse. Nous considérons les propriétés des pneus suivantes comme fixes et indépendantes :

- Le coefficient de frottement maximal qu'il soit possible d'obtenir des pneus (quelle que soit la direction de la force) est de 1 ;
- Le coefficient de résistance au roulement occasionné par les pneus est de 0,05 .

La coque de la voiture est soigneusement travaillée en soufflerie. La surface frontale est de 1,3 m^2 et la géométrie de la coque lui confère à la voiture un coefficient de déportance de 4,8 . Cette déportance s'accompagne d'une importante traînée (finesse 4). Les forces aérodynamiques ainsi générées se quantifient selon la relation

$$F_{aéro} = \frac{1}{2} \rho_{air} S_{fr} C V^2 \tag{3/13}$$

où $F_{aéro}$ est la force aérodynamique en question (N),

ρ_{air} est la masse volumique de l'air (kg m^{-3}),

S_{fr} est la surface frontale du véhicule[2] (m^2),

C est le coefficient de traînée ou de déportance respectivement (sans unité et considéré comme constant) ;

et V est la vitesse aérodynamique (m s^{-1}).

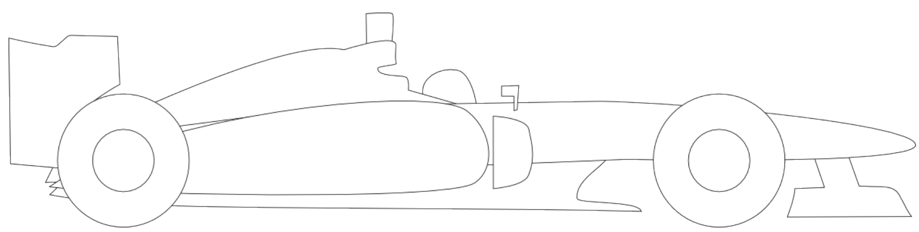

FIGURE 3.11 – Support publicitaire mobile.

2. Attention, dans le milieu aéronautique, c'est la surface alaire (vue du dessus) qui est utilisée pour référence dans cette même équation.

Pendant un test sur circuit, le/la pilote effectue un trajet en ligne droite. Le but de l'expérience est d'effectuer le plus rapidement possible l'évolution départ arrêté → vitesse maximale → arrêt.

1. Représentez de façon qualitative l'accélération de la voiture en fonction du temps, en en justifiant les principaux traits.
2. Faites de même pour la vitesse en fonction du temps.

Pendant la préparation du test, le/la pilote souhaite prévoir la vitesse maximale à laquelle il/elle pourra franchir un virage de rayon $100\ \mathrm{m}$ qui suit une longue ligne droite.

3. Quelle est la vitesse maximale de la voiture en ligne droite ?
4. Quelle est la vitesse maximale à laquelle la voiture est capable de se maintenir en virage à plat, à vitesse constante ?