Mémo de cours n°4

Intégrales

v1.0

4.1 Primitive

4.1.1 Définition

Si la fonction $f(x)$ est la dérivée de la fonction $F(x)$, c'est à dire que $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$, alors nous appelons la fonction F une primitive de f.

On indique cette propriété de $F(x)$ ainsi :

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4/1}$$

On note aussi souvent $F'(x) = f(x)$. Il peut exister un nombre infini de fonctions primitives d'une fonction f. Une condition suffisante pour qu'une fonction admette une primitive est qu'elle soit continue.

4.1.2 Recherche pratique d'une primitive

On peut trouver un grand nombre de primitives en inversant les méthodes de dérivation. Un tableau de dérivées sert donc, lu en sens inverse, de tableau de primitives.

Si une primitive de $f(x)$ est $F(x)$, alors toutes les autres primitives de $f(x)$ sont de la forme $F(x) + k$ où k est appelée constante d'intégration.

Certaines fonctions sont trop complexes pour que l'on puisse trouver aisément leur primitive.

Primitive de f F	f Dérivée de F
k	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^n
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

TABLE 4.1 – Tableau de dérivées/primitives.

4.2 Intégrale

4.2.1 Définition

On appelle intégrale de a à b de la fonction $f(x)$ le nombre $F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{4/2}$$

Ce nombre ne dépend pas de la fonction primitive choisie (puisque les constantes s'annulent dans la soustraction).

4.2.2 Calcul d'aires

La valeur $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine sous la courbe représentant $f(x)$ en fonction de x.

Cette aire peut prendre des valeurs négatives, par exemple lorsque $f(x) < 0$ ou lorsque $a > b$. Ses unités sont celles du produit $f(x) \times x$.

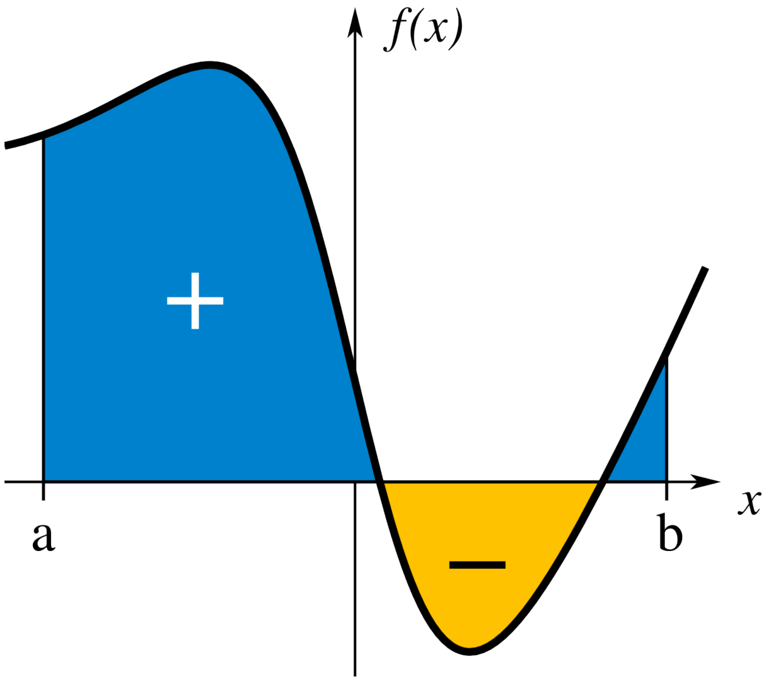

FIGURE 4.1 – L'intégrale de $x = a$ à $x = b$ de la fonction $f(x)$ est égale à l'aire sous la courbe représentant $f(x)$ en fonction de x. [*Dessin CC-by W : KSmrq*]

4.2.3 Somme de Riemann

Bernhard Riemann propose d'approximer le calcul de l'aire sous la courbe $f(x)$ en la divisant en n sections. Il mesure la surface de chaque section en considérant qu'elle est un rectangle de hauteur $f(x_i)$ et de largeur $(x_{i+1} - x_i)$.

La somme S de l'aire de chacun de ces termes, lorsque $x_1 = a$ et $x_n = b$, est donc une approximation de l'aire sous la courbe :

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{4/3}$$

On peut interpréter cette distance $(x_{i+1} - x_i)$ comme étant un intervalle de largeur Δx :

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{4/4}$$

Selon Riemann, lorsque le nombre n d'intervalles est infiniment grand (c'est à dire lorsque chaque intervalle Δx devient infiniment petit), la somme S tend vers l'intégrale de a à b de f :

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{\Delta x\to 0} S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4/5}$$

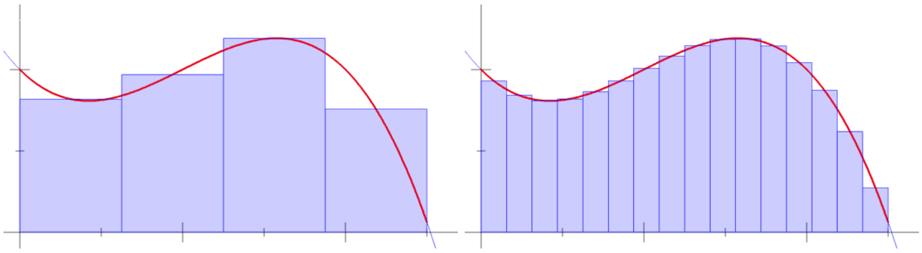

FIGURE 4.2 – Représentation graphique de l'aire S calculée avec $n = 4$ (à gauche) et $n = 16$ (à droite) intervalles. Plus le nombre d'intervalles est grand, et plus l'erreur commise est faible.

On montre que certaines fonctions ne sont pas intégrables de cette façon. Henri Lebesgue propose une méthode alternative, un peu plus lourde, dont nous n'aurons toutefois pas besoin dans ce cours.

4.2.4 Valeur moyenne d'une fonction

À partir de la définition de Riemann on trouve que si l'intervalle $(b - a)$ n'est divisé qu'en une seule section de largeur $\Delta x = b - a$, alors la somme S permet de calculer la valeur moyenne f_m de la fonction sur l'intervalle :

$$f_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4/6}$$

4.3 Utilité en physique

La notion d'intégrale est extrêmement utile en physique car elle permet de tenir compte de la variation des paramètres pendant une évolution.

Par exemple, un ressort stocke de plus en plus d'énergie au fur et à mesure qu'il est comprimé. L'énergie totale emmagasinée sur un intervalle donné est égale à la somme de l'énergie emmagasinée sur un nombre infini de petits intervalles de distance Δx. Sur chaque intervalle, on a effectué sur le ressort un travail égal à la distance Δx multipliée par la force $T(x)$. Ainsi, l'énergie totale emmagasinée de x_a à x_b est égale à

$$E = \lim_{\Delta x \to 0} \sum T(x_i)\Delta x = \int_{x_a}^{x_b} T(x)\,\mathrm{d}x \tag{4/7}$$

Il suffit alors de connaître la fonction $T(x)$ (c'est à dire le comportement du ressort) pour pouvoir quantifier l'énergie emmagasinée entre deux points arbitraires.

D'une façon générale, à chaque fois que nous aurons affaire à une variation d'un paramètre, plutôt que d'utiliser la valeur "moyenne" de ce paramètre sur notre évolution, nous aurons recours à une intégrale, c'est à dire à la somme intégrale d'un ensemble d'évolutions infiniment petites, pendant lesquelles ce paramètre garde à chaque fois une valeur constante.

Bureau d'études n°4

4.1 Dragster miniature à air comprimé

Un groupe d'étudiants met au point un dragster miniature motorisé par un réservoir d'air comprimé. Le réservoir alimente une petite turbine à air connectée mécaniquement aux roues. Au fur et à mesure que le dragster avance, le réservoir se vide, et la force transmise aux roues diminue. On obtient ainsi une relation de type :

$$F = 15 - 0,04x^2 \qquad (4/8)$$

où F est la force transmise aux roues (N),

et x est la distance parcourue depuis le départ (m).

Le dragster a une masse (supposée constante) de 1.5 kg. Il est relâché à l'immobile et effectue une course de 15 m. Nous négligeons tous les frottements lors de la course.

1. Exprimez la variation de l'énergie cinétique du dragster entre deux points arbitraires le long de la piste.
2. Exprimez sa vitesse en fonction de la distance, et ainsi la vitesse atteinte lorsqu'il franchit la ligne d'arrivée.

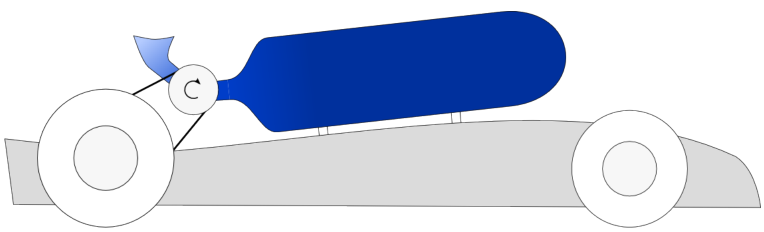

FIGURE 4.3 – Bolide miniature mis au point par le groupe étudiant. Le réservoir d'air comprimé se vide au fur et à mesure que l'énergie est transmise aux roues.

Pour pimenter la course, les étudiants décident d'utiliser une surface ondulée. La hauteur h de la surface est mesurée en fonction de la distance x :

$$h = 3 - \sin(x) \tag{4/9}$$

où h est la hauteur par rapport au point de mesure (m),

et x est la distance parcourue depuis le départ (m), utilisé en radians dans l'équation 4/9.

On admet que le dragster maintient un contact avec la piste pendant toute la course.

1. Exprimez (à nouveau) la variation de l'énergie cinétique du dragster entre deux points arbitraires le long de la piste.
2. Quelle est cette fois sa vitesse à la ligne d'arrivée ?