Mémo de cours n°5

Produit scalaire

v1.0.3

CC-BY-SA Olivier Cleynen – introméca.ariadacapo.net

5.1 Produit scalaire de deux vecteurs

5.1.1 Définition

On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs **un nombre** défini par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta \qquad (5/1)$$

où θ est l'angle séparant les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Nous noterons toujours ce produit scalaire avec un point[1] ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) mais il est parfois noté avec le symbole $\times$. Il faut prendre garde à bien le différencier du *produit vectoriel*, un autre type de multiplication de vecteurs que nous étudierons dans un cours prochain.

On montre que le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}\{x_a, y_a, z_a\}$ et $\vec{b}\{x_b, y_b, z_b\}$ est quantifié par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \qquad (5/2)$$

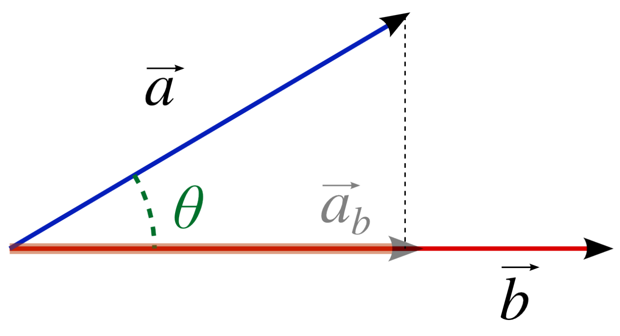

FIGURE 5.1 – Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Le produit scalaire est le multiple des normes b et $a_b = a\cos\theta$.

1. En anglais le produit scalaire est nommé "*dot product*" ou simplement "*scalar*".

5.1.2 Propriétés importantes

Le produit scalaire de deux vecteurs donnés est le même quelle que soit l'ordre dans lequel on les multiplie :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{5/3}$$

Un examen de la définition 5/1 permet également de montrer que

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{-b}) = -(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{5/4}$$

On peut calculer l'angle θ séparant deux vecteurs de coordonnées connues (figure **??**) simplement en faisant usage des équations 5/1 et 5/2 :

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \tag{5/5}$$

$$\cos\theta = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{ab} \tag{5/6}$$

Ces équations sont vraies quelles que soient les orientations et les origines des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Enfin, on remarque que le produit scalaire d'un vecteur $\vec{a}$ et d'une somme de vecteurs $\vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ peut se calculer simplement :

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \tag{5/7}$$

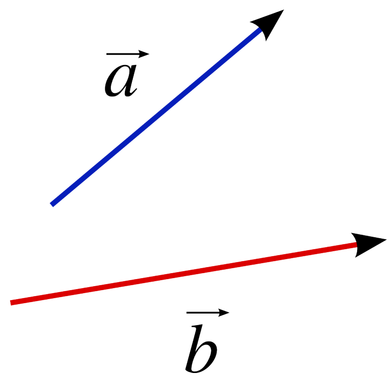

FIGURE 5.2 – Deux vecteurs arbitraires dont on peut calculer l'angle qui les sépare simplement avec leurs coordonnées.

5.2 Utiliation du produit scalaire en physique

Le produit scalaire en physique est souvent utilisé pour exprimer et répondre à l'une des deux questions :

1. Quelle est la longueur de la projetée d'un vecteur le long d'un axe connu ?
2. Quel angle sépare deux vecteurs de coordonnées connues ?

Une utilisation importante du produit scalaire est le calcul d'un travail. Quelque soit l'orientation d'une force F par rapport à un objet, le travail qu'elle développe lorsqu'il se déplace sur une distance d est simplement :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \qquad (5/8)$$

où W est le travail (J) ;

$\vec{F}$ est le vecteur représentant la force de norme F (N) appliquée ;

et $\vec{d}$ est le vecteur représentant la distance d (m) parcourue par l'objet.

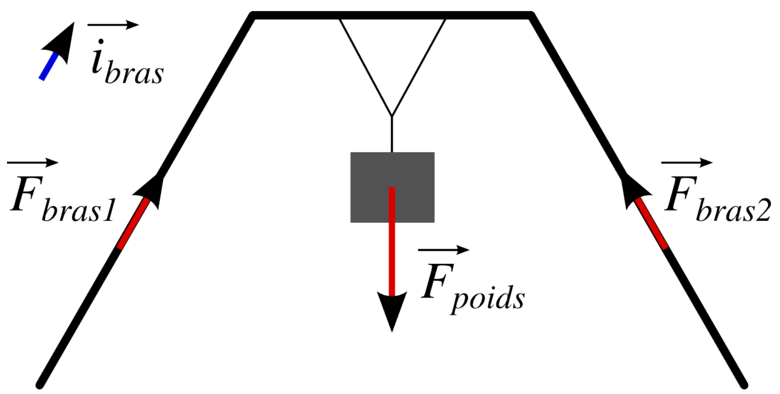

FIGURE 5.3 – Portique maintenant une masse importante. La force F_{poids} est compensée par une réaction F_{bras} sur chacun des montants. On a $F_{bras} = -0.5\,\vec{F}_{poids} \cdot \vec{i}_{bras}$

Bureau d'études n°5

v1.0.3

5.1 Radar de gendarmerie

Un/e gendarme dispose d'un petit radar portatif. Cet équipement émet un faisceau laser dans une direction, et mesure la vitesse longitudinale de la cible dans cette direction.

Le/la gendarme se positionne sur le bas-côté d'une route en ligne droite et mesure la vitesse des véhicules qui y circulent. Il/elle se dissimule derrière un obstacle et le faisceau laser effectue un angle de 25° avec la route.

1. Quelle vitesse sera indiquée au radar si le véhicule circule à 50 km/h ?
2. Avec quelle certitude le/la gendarme doit-il mesurer l'angle par rapport à la route s'il/elle souhaite évaluer la vitesse réelle du véhicule avec une certitude de ±1 km/h ?

Le/la gendarme fait l'acquisition d'un nouveau système radar muni de deux faisceaux, tous deux pointés sur la même cible et séparés par un angle (fixe) de 5°. L'entreprise commercialisant ce système affirme qu'il permet de mesurer la vitesse des véhicules sans mesure d'angle.

3. Schématisez graphiquement la vitesse mesurée par chaque faisceau lorsque le système est pointé sur un véhicule.

Figure 5.4 – Récepteur radar. Le principe de fonctionnement (envoi d'une onde et écoute de l'écho sur la cible) n'impose pas l'utilisation d'une antenne parabolique.

4. Montrez que la vitesse du véhicule peut être mesurée sans connaître l'angle que fait le système radar par rapport à la vitesse du véhicule (et qu'ainsi le/la gendarme peut effectuer ses mesures dans n'importe quelle position).
5. Le/la gendarme pointe le radar sur un véhicule en circulation et les faisceaux mesurent une vitesse de 48,3 km/h et de 45,5 km/h respectivement. Quelle est la vitesse sol de la voiture ?

5.2 Tractage de parachute

Un/e touriste se fait tracter en parachute derrière un bateau. Le parachute a une finesse (que nous considérons fixe) de 5 et procure une portance liée à la vitesse aérodynamique par la relation :

$$L = 128 V^2 \tag{5/9}$$

où L est la portance générée (N)

et V est la vitesse ($\mathrm{m\,s^{-1}}$).

Le/la passager/e et son équipement ont une masse de 90 kg. La masse du parachute et celle du câble sont négligées. Dans un premier temps, le bateau se déplace à vitesse minimale, avec le câble à l'horizontale (les passagers frôlant la surface de l'eau).

1. Quelle est la vitesse minimale d'évolution ?

Le bateau prend ensuite de la vitesse et navigue à 45 $\mathrm{km\,h^{-1}}$. La finesse du parachute n'est pas affectée.

2. Quel angle le câble forme-t-il avec l'horizontale ?
3. Quelle est la force de traction dans le câble ?
4. Quelle puissance le moteur doit-t-il fournir au bateau pour maintenir le vol ?

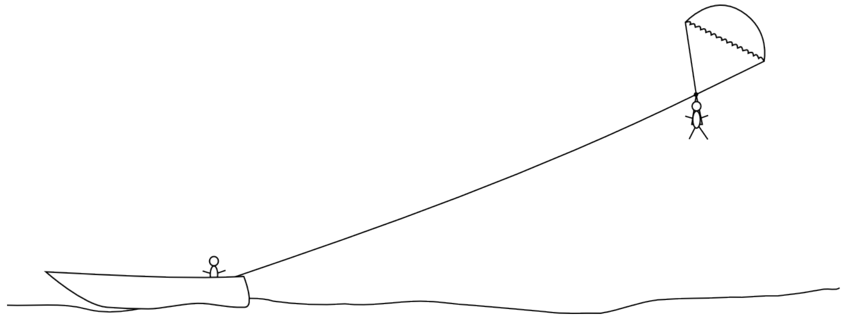

Figure 5.5 – Parachute tracté par un bateau.