Mémo de cours n°6

Produit vectoriel

v1.6.4

6.1 Produit vectoriel de deux vecteurs

6.1.1 Définition

On appelle *produit vectoriel* de deux vecteurs **un vecteur** noté :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \tag{6/1}$$

Le vecteur $\vec{c}$ est tel que :

sa norme soit égale à

$$c = a\ b\ \sin\theta \tag{6/2}$$

sa direction soit perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$;

son sens soit tel que si $\vec{b}$ est placé à l'extrémité de $\vec{a}$, le vecteur s'éloigne d'un point d'observation depuis lequel la rotation imposée par $\vec{b}$ soit dans le sens horaire.

De fait la description de $\vec{c}$ nécessite une troisième dimension même si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peuvent être décrits avec les deux mêmes dimensions.

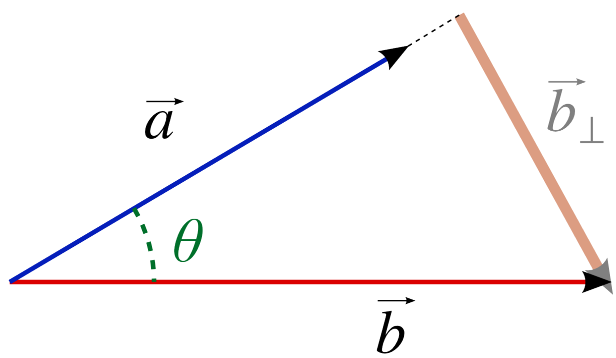

Figure 6.1 – Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ a pour longueur le multiple des normes $b_\perp$ et a. Dans le cas montré ici, le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ s'enfonce au travers du plan du document (en s'éloignant) du lecteur/de la lectrice.

Nous noterons toujours le produit vectoriel avec avec le symbole wedge ($\vec{a} \wedge \vec{b}$) mais il est parfois noté avec le symbole $\times$, en particulier dans la littérature anglo-saxonne.[1] Il faut prendre garde à bien le différencier du *produit scalaire*, étudié au cours précédent.

On peut interpréter le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ comme représentant le « bras d'action » de $\vec{b}$ autour du point d'origine de $\vec{a}$.

6.1.2 Coordonnées d'un produit vectoriel

On montre que le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}\{x_a, y_a, z_a\}$ et $\vec{b}\{x_b, y_b, z_b\}$ s'exprime selon :

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} \tag{6/3}$$

On obtient donc ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k} && (6/4) \\ &= (y_a z_b - y_b z_a)\vec{i} - (x_a z_b - x_b z_a)\vec{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\vec{k} && (6/5) \end{aligned}$$

6.2 Propriétés importantes

On remarque premièrement que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{b} \wedge \vec{a}$ sont des vecteurs opposés (figure 6.2) :

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{b}) \tag{6/6}$$

On note également que l'inversion du sens d'un vecteur change celui du produit vectoriel (figure 6.3) :

$$\vec{a} \wedge \overrightarrow{-b} = -(\vec{a} \wedge \vec{b}) \tag{6/7}$$

Enfin, une propriété intéressante d'un produit vectoriel est que l'on peut décomposer l'un des deux multiples. Si l'on a $\vec{b} = \vec{d} + \vec{e}$ alors nous pouvons écrire :

1. En anglais le produit vectoriel est nommé "cross product" ou "vector product".

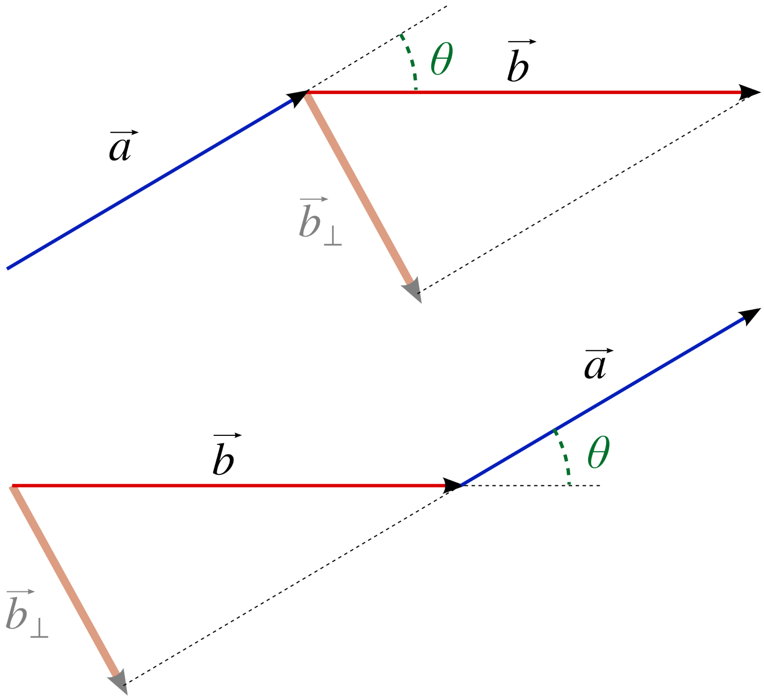

Figure 6.2 – Les vecteurs $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{b} \wedge \vec{a}$ sont de même norme mais de sens opposé (le premier s'enfonçant dans le plan, le second en ressortant vers le lecteur/la lectrice.)

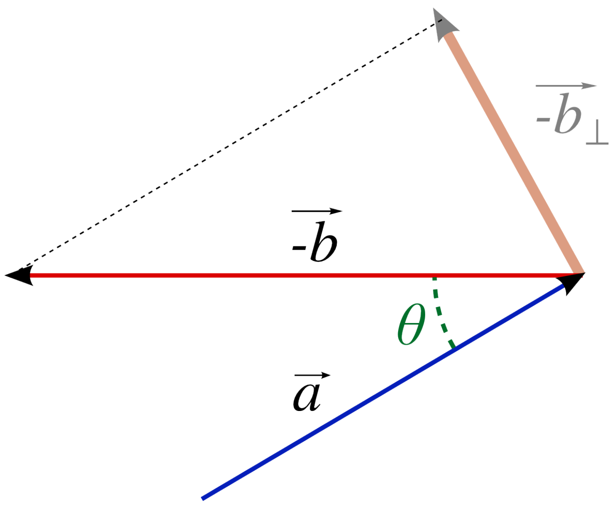

Figure 6.3 – Le sens de $\vec{a} \wedge \overrightarrow{-b}$ est opposé à celui de $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Ici il ressort du plan vers le lecteur/la lectrice.

$$\vec{a} \wedge (\vec{d} + \vec{e}) = \vec{a} \wedge \vec{d} + \vec{a} \wedge \vec{e} \tag{6/8}$$

6.3 Utilisation du produit vectoriel en physique

6.3.1 Moment d'une force

Nous utiliserons beaucoup le produit vectoriel en physique newtonienne pour quantifier et comparer les *moments*. On peut en effet quantifier l'effort de torsion qu'applique une force $\vec{F}$ autour d'un point arbitraire avec une grandeur vectorielle $\vec{M}$ nommée moment :

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{6/9}$$

où $\vec{M}$ est le moment de $\vec{F}$ autour d'un point O (avec M en N m) ;
$\vec{F}$ est la force s'appliquant sur le solide étudié (avec F en N) ;
et $\vec{r}$ est le vecteur liant le point O au point d'application de $\vec{F}$ (avec r en m).

L'expression du moment M sous forme de vecteur permet de l'additionner et de le soustraire à d'autres moments même lorsqu'ils sont d'orientation complètement différentes.

Une notion fort utilisée en mécanique est celle de l'équilibre en rotation [2] : si le corps étudié a une vitesse de rotation constante (par exemple, nulle), alors la somme $\Sigma\vec{M}$ de tous les moments qui s'appliquent sur lui est égale à $\vec{0}$.

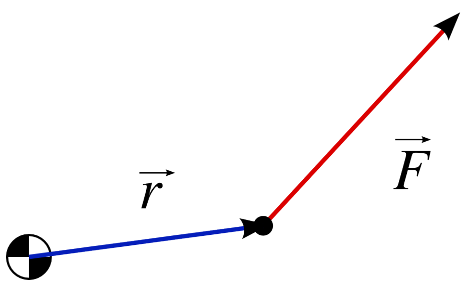

Figure 6.4 – Une force $\vec{F}$ appliquant un moment autour d'un point de référence.

2. L'étudiant/e abordera plus formellement cette notion (variation du moment angulaire) dans un cours de cinétique. Elle est hors du cadre de ce cours.

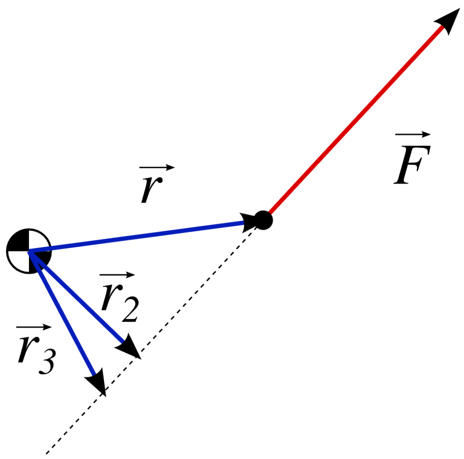

FIGURE 6.5 – Le moment $\vec{M}$ appliqué par $\vec{F}$ est le même quelque soit celui des vecteurs $\vec{r}$, $\vec{r}_2$ ou $\vec{r}_3$ utilisé pour la quantifier.

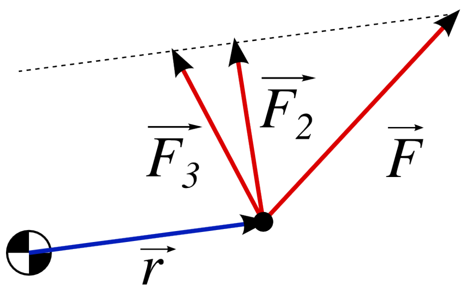

FIGURE 6.6 – Les trois forces $\vec{F}$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ exercent le même moment autour du point de référence.

6.3.2 Vitesse de rotation

Une autre grande application du produit vectoriel est la quantification des vitesses et accélérations en rotation.

Lorsqu'un corps décrit une trajectoire arbitraire autour d'un point de référence immobile, on peut exprimer son vecteur vitesse $\vec{V} \equiv \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ selon la relation :

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{6/10}$$

où $\vec{V}$ représente la vitesse (de norme V en $\mathrm{m\,s^{-1}}$) ;

$\vec{\omega}$ représente le taux de rotation (de norme ω en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$) ;

et $\vec{r}$ représente la position du corps étudié (de norme r en m).

En continuant ce raisonnement on peut exprimer l'accélération $\vec{a} \equiv \mathrm{d}\vec{V}/\mathrm{d}t$ en dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{\omega} \wedge \vec{r}] \tag{6/11}$$

$$= \vec{\omega} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{r} \tag{6/12}$$

En introduisant les termes d'écriture plus légère $\vec{V} \equiv \mathrm{d}\vec{r}/\,\mathrm{d}t$ et $\dot{\vec{\omega}} \equiv \mathrm{d}\vec{\omega}/\,\mathrm{d}t$, cette équation devient :

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \vec{V} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} \tag{6/13}$$

On remarque que le premier de ces deux termes, $\vec{\omega} \wedge \vec{V}$ doit être normal à $\vec{V}$. De même, le second est normal à $\vec{r}$, de sorte que l'on peut décomposer l'accélération en deux composantes :

$$\vec{a}_N = \vec{\omega} \wedge \vec{V} \tag{6/14}$$

$$\vec{a}_T = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} \tag{6/15}$$

où $\vec{a}_N$ et $\vec{a}_T$ sont les vecteurs accélération normale et tangente respectivement (de normes a_N et a_T en $\mathrm{m\,s^{-2}}$) ;

et $\dot{\vec{\omega}}$ représente la variation du taux de rotation (de norme $\dot{\omega}$ en $\mathrm{rad\,s^{-2}}$).

Ces deux expressions permettent de quantifier l'accélération d'un point par rapport à un point de référence immobile facilement, lorsque son taux de rotation $\vec{\omega}$ et la variation de son taux de rotation $\dot{\vec{\omega}}$ sont connus.

Bureau d’études n°6

v1.6.4

6.1 Équilibrage longitudinal d’un avion de ligne

Un Airbus A380-F (caractéristiques en tableau 6.1) est chargé sur trois ponts avec les containers de fret suivants :
– 32 LD3 de 500 kg chacun (profondeur 1,53 m) ;
– 50 LD7 de 1,4 t chacun (profondeur 2,25 m) ;
– 30 LD7 de 800 kg chacun (profondeur 2,25 m).
L’avion a pour masse à vide 253 t et emporte 150 t de carburant pour le vol. Le centre de gravité de l’avion fuselage vide, mais avec son carburant, est situé comme montré en figure 6.7.

1. Chargez les containers selon l’agencement de votre choix, et représentez graphiquement (qualitativement) les moments que leurs poids génèrent autour du centre de gravité de l’avion avant chargement.
   Contrainte facultative : Agencez les containers pour minimiser l’effort généré par la queue en vol.
2. Quelle est la position longitudinale du centre de gravité au décollage ?

En configuration de décollage (volets 15° & becs position 2) la portance générée par les ailes s’applique au point A. En croisière (configuration lisse) la portance générée par les ailes s’applique au point B.
(Il s’agit d’une simplification – en réalité, le point d’application dépend aussi de la force générée, comme vous pourrez l’étudier en mécanique du vol)

3. Quelle force verticale doit-on générer à l’aide de la queue pour équilibrer l’avion au décollage et en croisière ?
4. Cet effort aura-t-il tendance à augmenter ou à diminuer pendant la croisière ? (justifiez votre réponse).

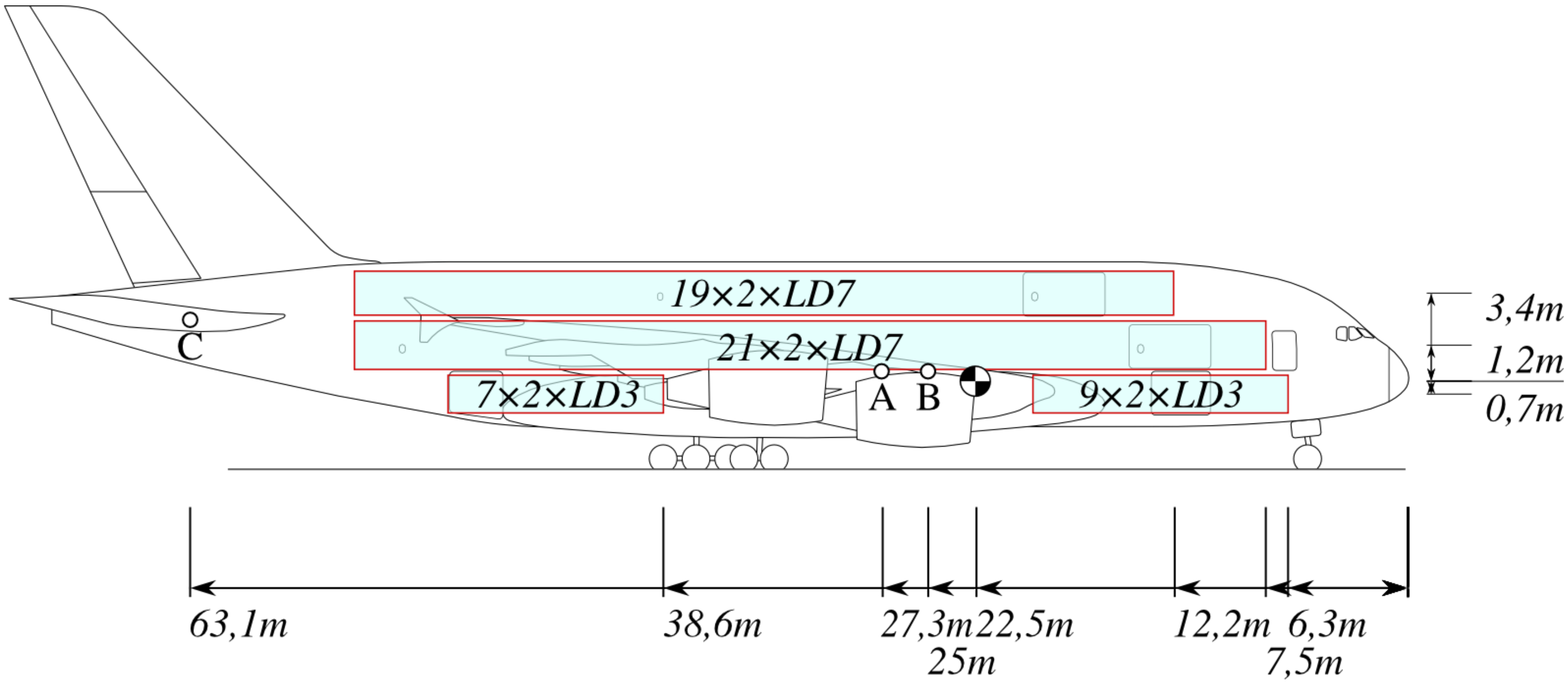

Figure 6.7 – Positions et dimensions approximatives des soutes cargo à bord de l'A380F.

	A380-800	A380F
Cockpit crew	2	
Seating capacity	525 (3-class)	–
Length overall	72,73 m	
Wingspan	79,75 m	
Height	24,45 m	
Wheelbase	31,88 m	
Wing area	845 m^2	
Aspect ratio	7,5	
Wing sweep	33,5°	
Maximum taxi/ramp weight	562 000 kg	592 000 kg
Maximum take-off weight	560 000 kg	590 000 kg
Maximum landing weight	386 000 kg	427 000 kg
Maximum zero fuel weight	361 000 kg	402 000 kg
Typical operating empty weight	276 800 kg	252 200 kg
Maximum structural payload	89 200 kg	149 800 kg
Maximum cargo volume	184 m^3	1 134 m^3
Maximum operating speed	Mach 0.89	
Take off run at MTOW/SL ISA	2 750 m	2 900 m
Range at design load	15 400 km (8 300 nmi)	10 400 km (5 600 nmi)
Service ceiling	13 000 m (43 000 ft)	
Maximum fuel capacity	320 000 l	
Thrust (4 ×)	320 kN (Trent 972/B)	340 kN (Trent 977/B)

Table 6.1 – Caractéristiques de l'Airbus A380 (motorisation Rolls-Royce).

6.2 Équilibrage en lacet et roulis d'un avion de ligne

Un A380-800 (tableau 6.1, figure 6.8) est victime d'une panne moteur pendant le roulement au décollage. L'équipage a pris la décision de continuer le décollage et de revenir ensuite à l'aéroport se poser. Le moteur inopérant (n°1, position extérieure gauche) génère une traînée de 2 t.

Pendant la fin du roulage, la rotation, et la montée initiale, l'avion continue d'accélérer. Lorsque la vitesse de sécurité V_2 est atteinte, les gouvernes aérodynamiques ont suffisamment d'effet pour permettre à l'avion de maintenir un cap fixe. À cet instant, l'angle de dérapage est de 5° et le/la pilote aux commandes utilise la dérive verticale de queue (aux palonniers) en butée.

1. Quantifiez et représentez graphiquement le moment exercé par les quatre moteurs autour du centre de gravité.
2. Quelle force aérodynamique doit-on générer avec la dérive pour que l'avion puisse maintenir son cap ?
3. Quel moment en roulis la dérive générera-t-elle autour du centre de gravité ? Représentez graphiquement ce moment.
4. Comment le/la pilote aux commandes compensera-t-il/elle ce moment en roulis ?

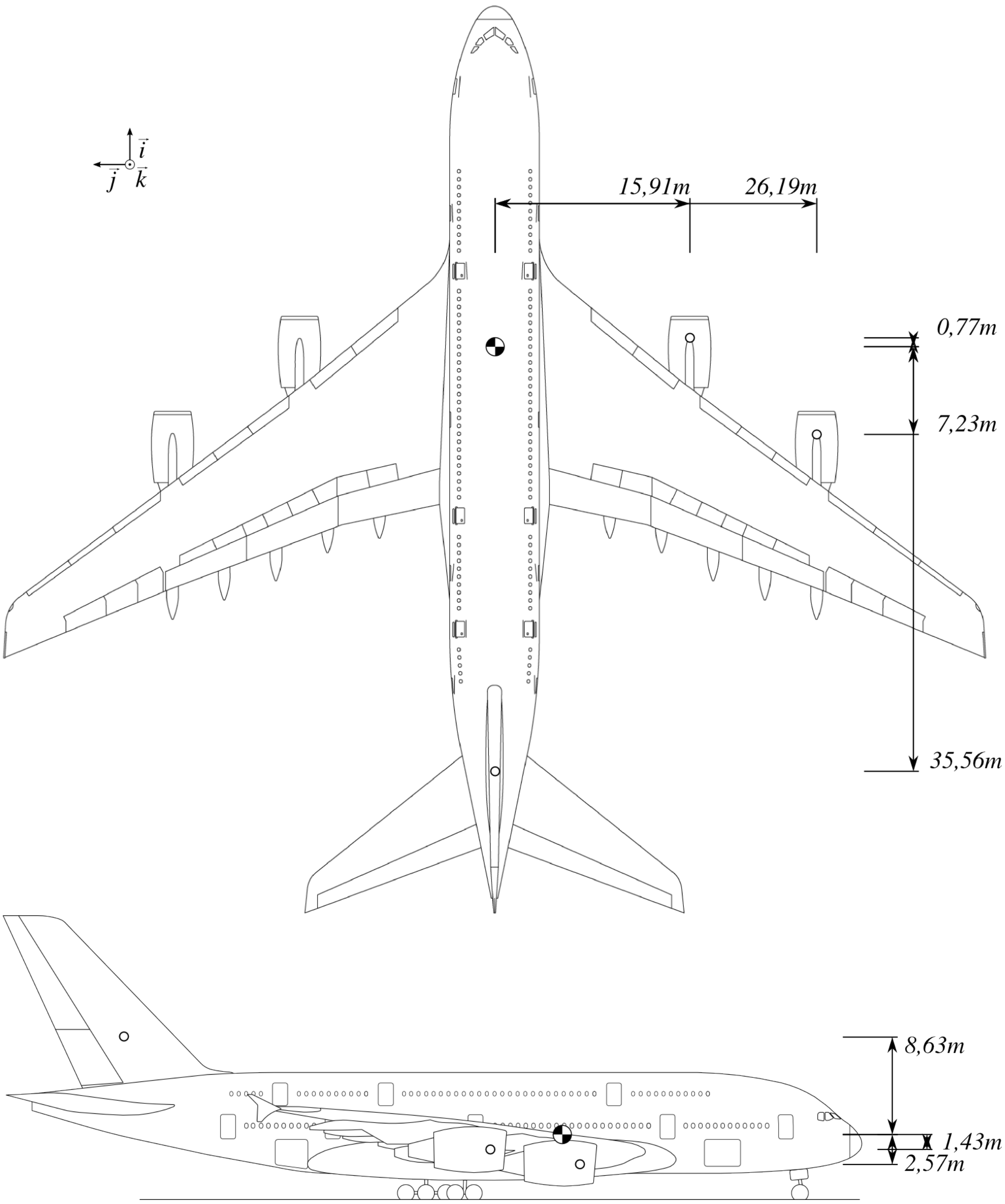

FIGURE 6.8 – Positions relatives du centre de gravité et des points d'application des forces moteur et dérive pour l'A380-800.

Plans CC-BY-SA Julien Scavini & CC-0 Olivier Cleynen

6.3 Catapultage d’un avion militaire

Un avion militaire (figure 6.9) est muni d’un train d’atterrissage avant dit « sauteur », qui est capable de s’étendre brutalement lorsque l’avion est catapulté d’un navire. Le système permet d’augmenter l’angle d’attaque de l’avion pendant une phase où ses commandes aérodynamiques sont peu effectives.

Nous étudions tout d’abord le cas (hypothétique) où le train avant est détendu alors que l’avion est immobile au sol. La roulette de nez est éloignée avec une vitesse constante de 2,5 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ de la jambe de train avant, et l’avion pivote autour de la roue de son train d’atterrissage principal.

1. Quel est le taux de rotation de l’avion ?
2. Représentez ce taux de rotation par un vecteur et calculez ses coordonnées.
3. Représentez graphiquement et exprimez les coordonnées des vecteurs vitesse des points B et C.
4. Faites de même pour les vecteurs accélération de ces points.

L’avion est maintenant catapulté d’un navire immobile. À l’instant où nous étudions son cas, la catapulte lui confère une accélération de 8 $\mathrm{m\,s^{-2}}$ et une vitesse de 30 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Le train sauteur fonctionne comme décrit plus haut, et confère de plus à l’avion un changement de taux de rotation de +0,1 $\mathrm{rad\,s^{-2}}$.

5. Quelle est la vitesse de chacun des points B et C ? Représentez graphiquement ces vitesses.
6. Quelle est l’accélération de chacun de ces deux points ? Représentez graphiquement ces accélérations.

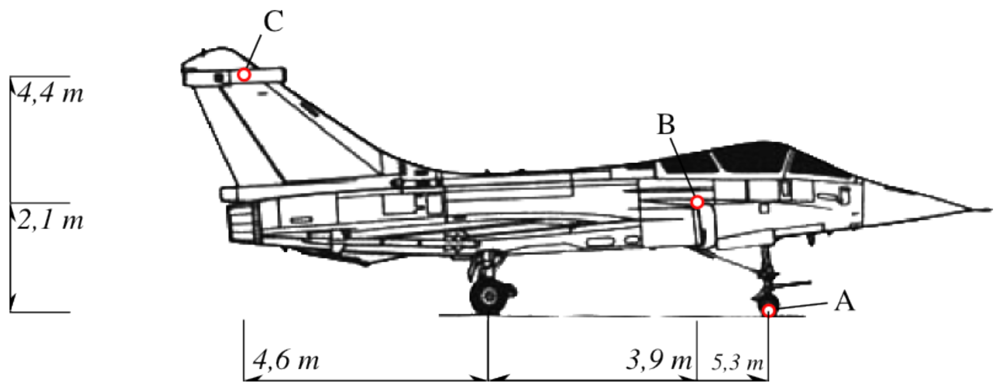

Figure 6.9 – Rafale M. Le train avant, dit « sauteur », se rallonge pendant les phases de catapultage pour faire pivoter l’avion en tangage.

source inconnue